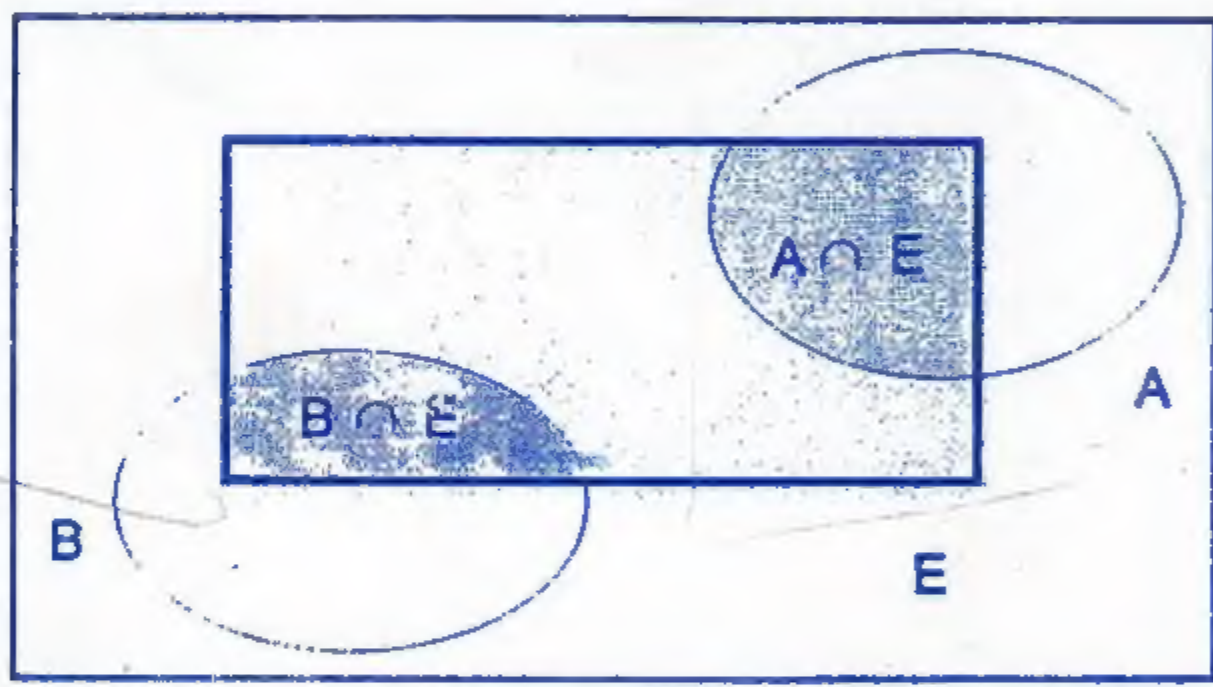


دروس في

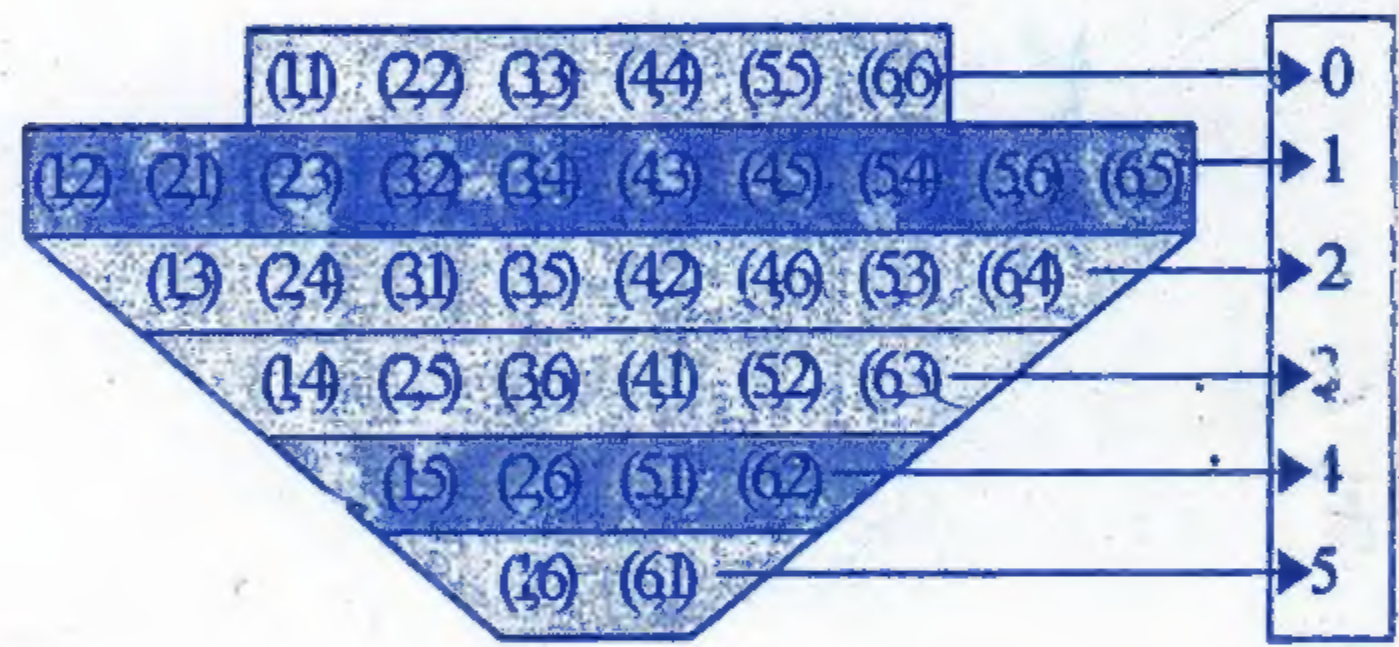
نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

إعداد

أ.د. علي نصر السيد الوكيل

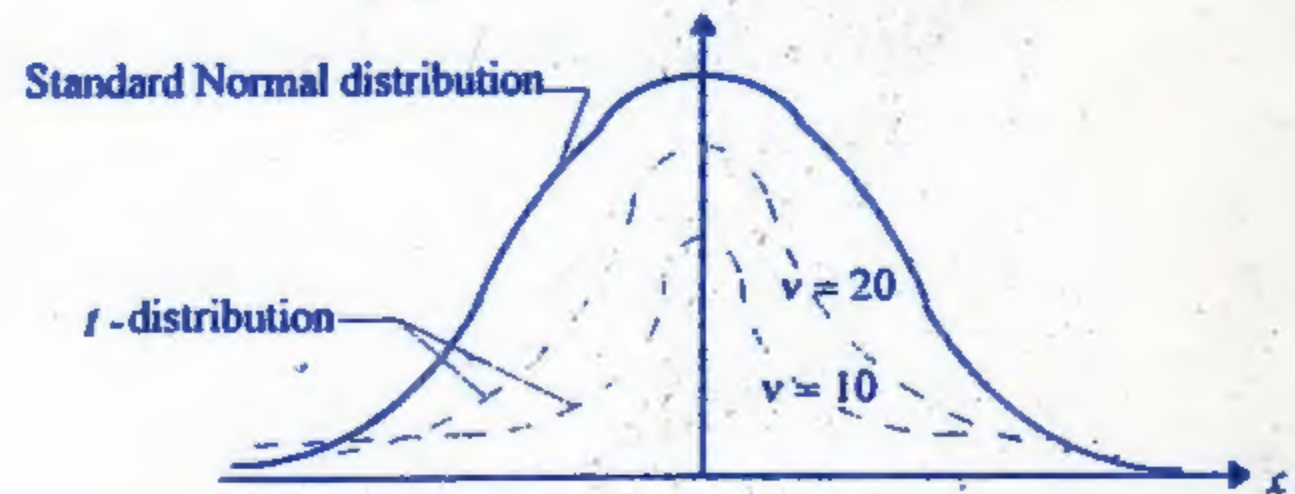
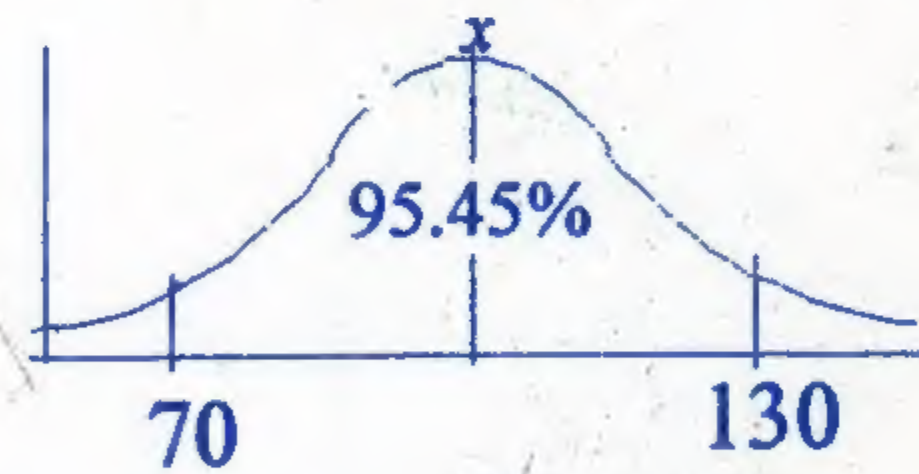
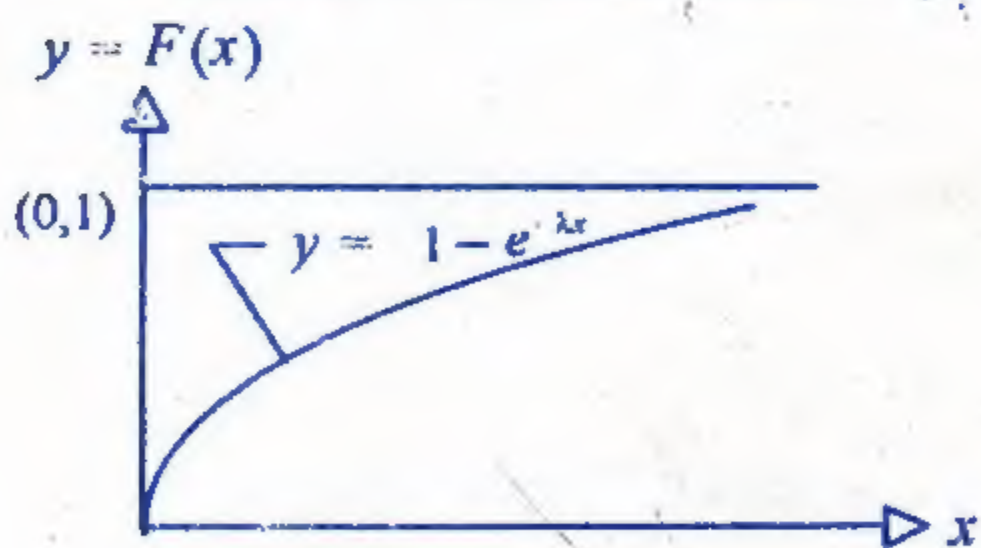
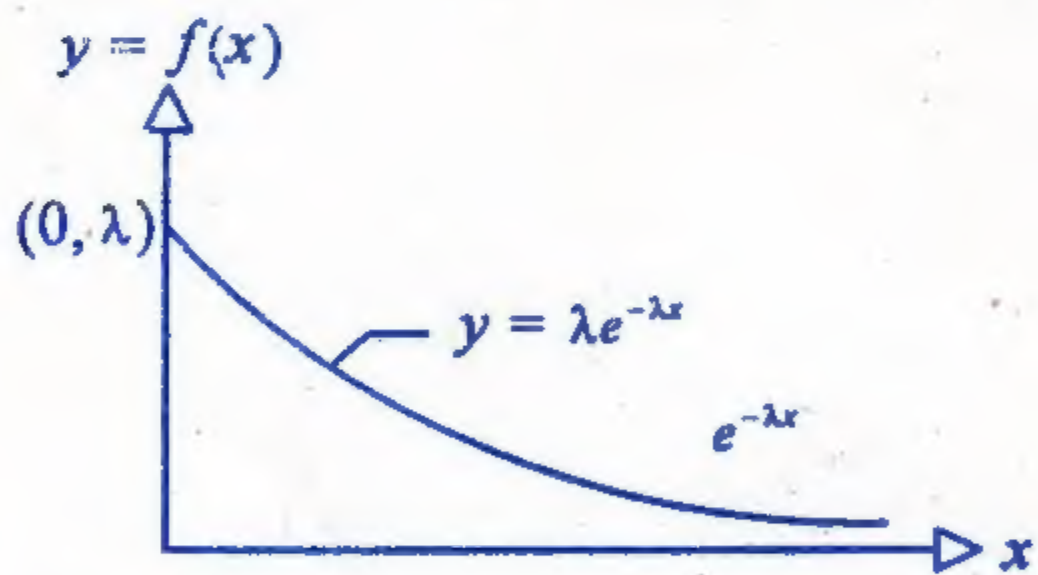


S



S

X

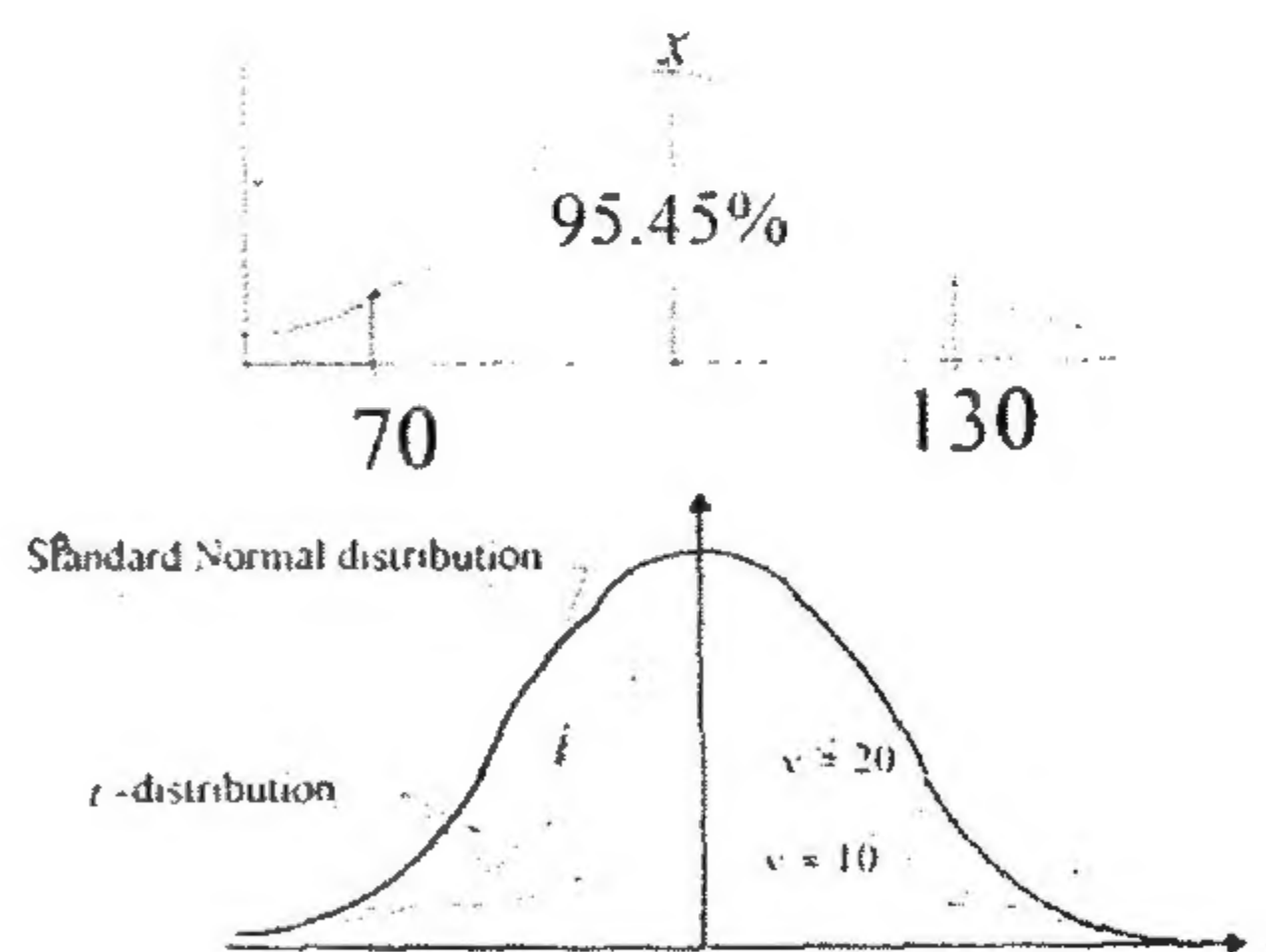
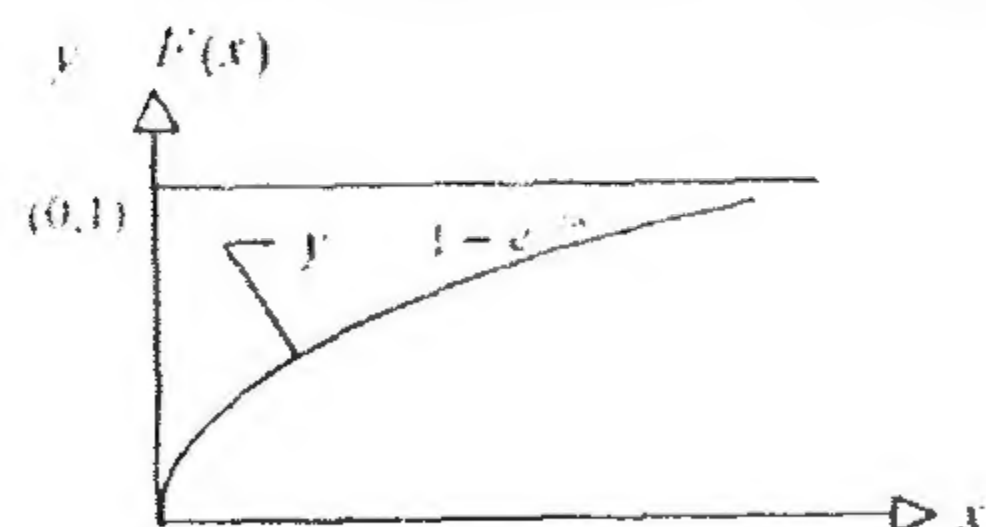
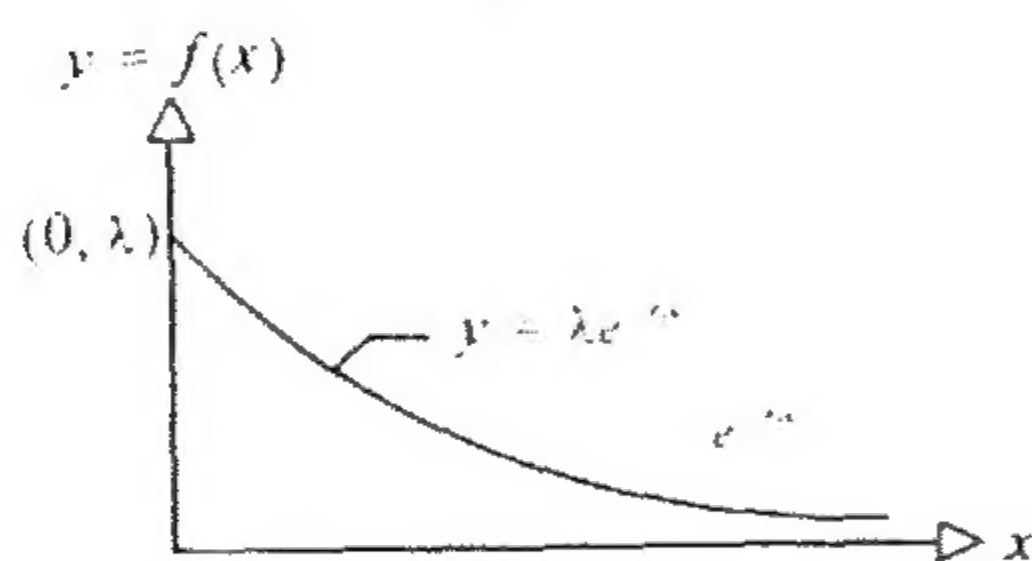
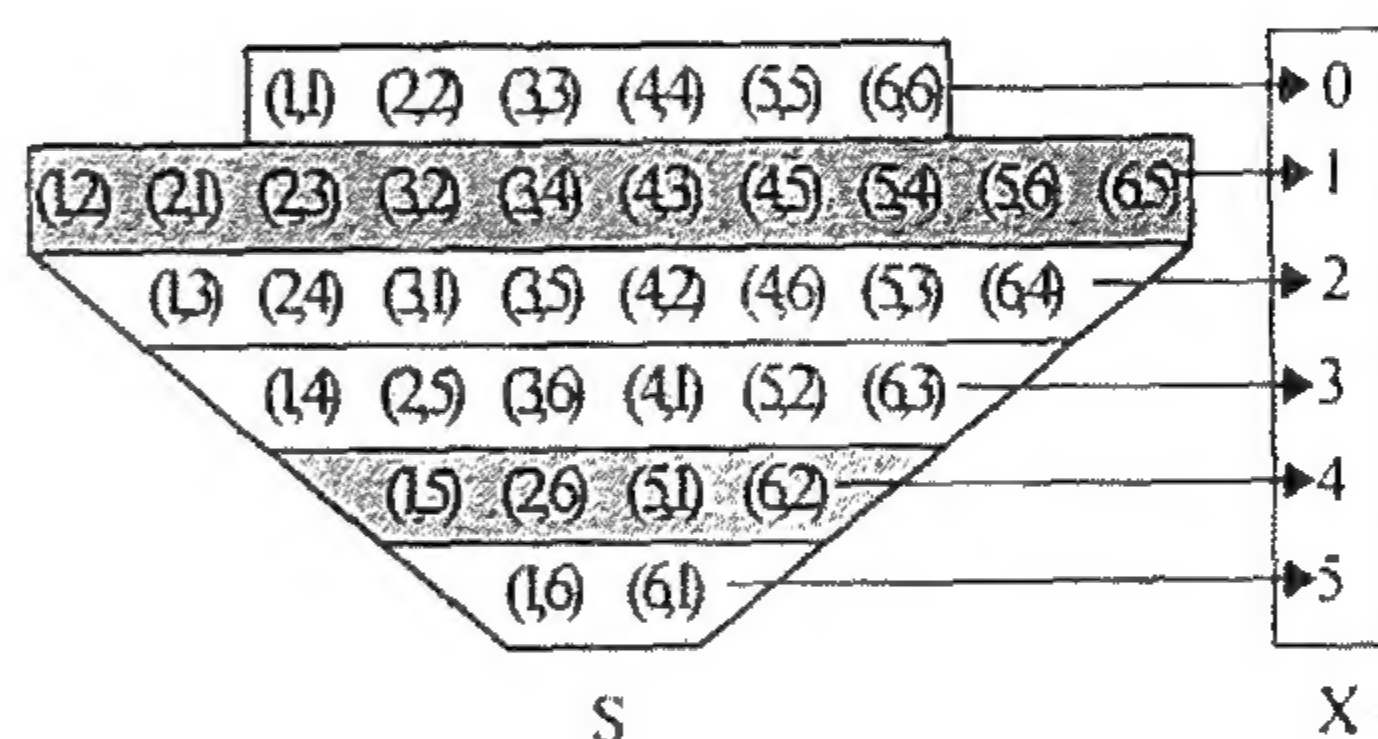
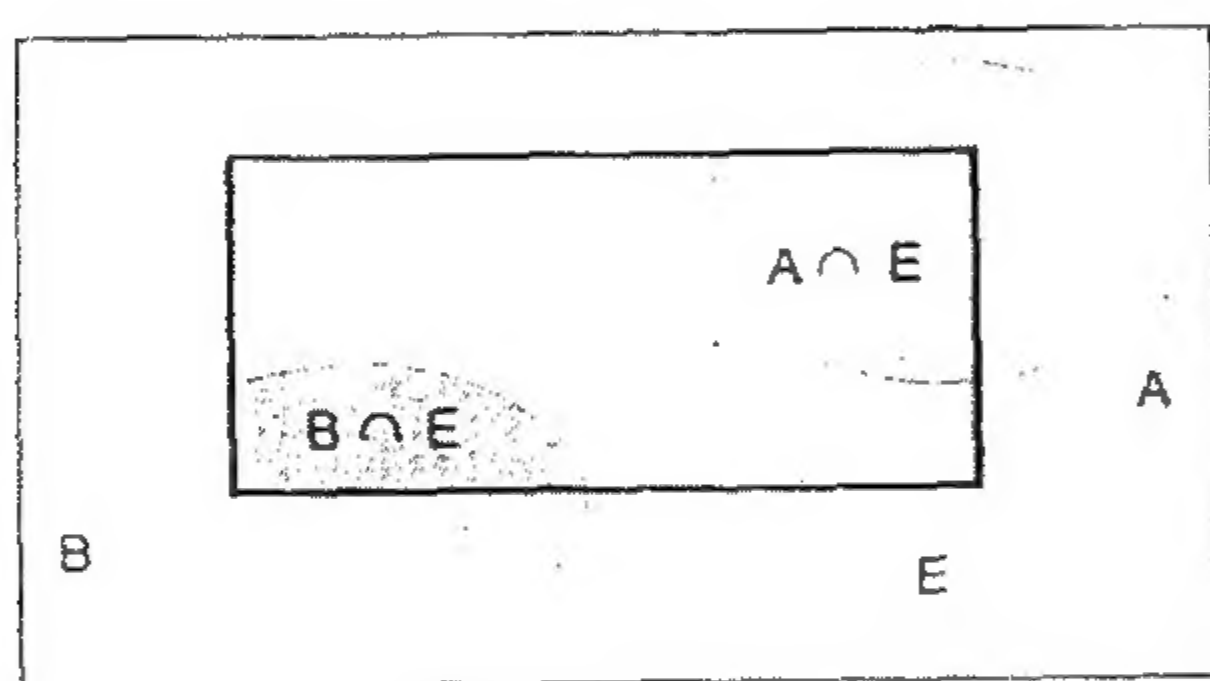


دروس في

نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

إعداد

أ.د. على نصر السيد الوكيل



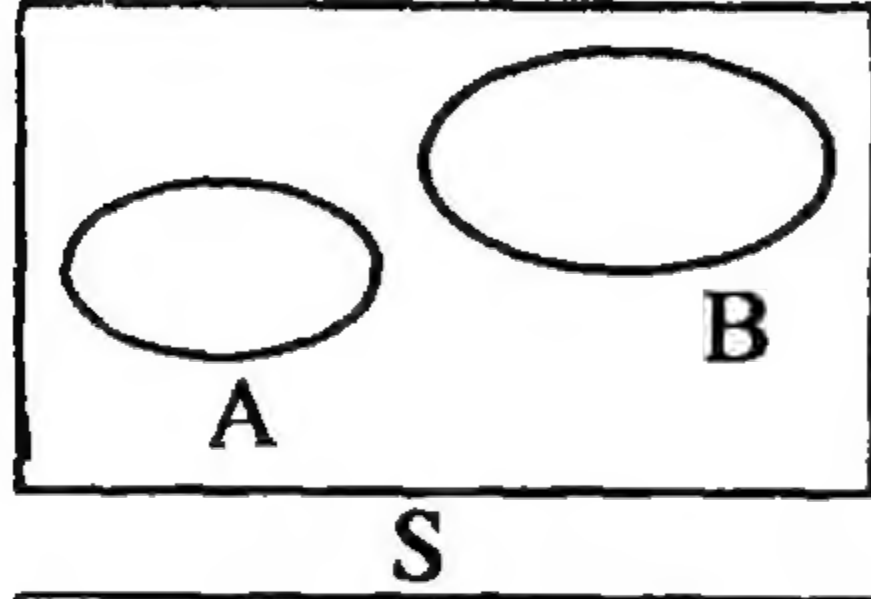
رقم الإيداع
٢٠١٠ / ١٩٠١٠
دار المصطفى للطباعة بناها الجديدة ت: ٠١٢/٢٢٢٨٢٦٠

الدرس الأول

طرق العد COUNTING TECHNIQUES

١-١ عدد عناصر مجموعة Number of Elements in a Set

إذا كانت المجموعة A تحتوى عددا محدودا من العناصر فإن عدد هذه العناصر يرمز له بالرمز $v(A)$ ؛ وتوجد قواعد تساعد في معرفة عدد عناصر المجموعات المركبة وهى:

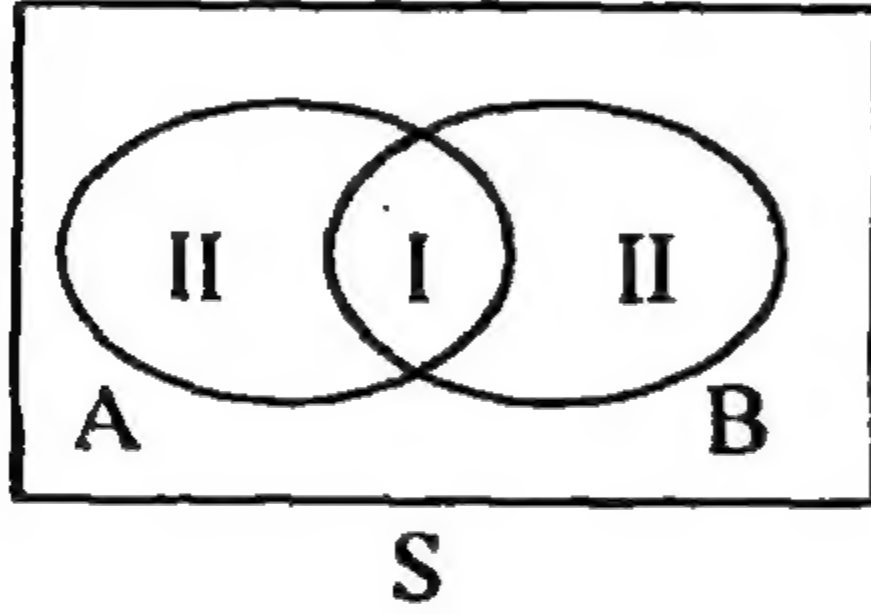


(أ) إذا كانتا A ، B متباعدتين فإن:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$$

(ب) إذا كانتا A ، B متقاطعتين فإن:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$$



يتضح من الشكل أننا إذا أخذنا $v(A) + v(B)$ فإننا نكون قد حسبنا عدد العناصر في المنطقة I التى تمثل $A \cap B$ مرتين. لذا يجب أن نطرح $v(A \cap B)$.

مثال (١)

لدينا فصل من الطلاب منهم ٣٠ يدرسون اللغة الانجليزية كلغة أجنبية أولى ، ١٢ يدرسون اللغة الفرنسية كلغة أجنبية أولى. كم طالبا فى هذا الفصل إذا علمت أن اللغات الأجنبية الأولى المتاحة فى المدرسة هى الإنجليزية والفرنسية فقط، وأن كل طالب يدرس لغة أجنبية واحدة؟

الحل

لتكن E هى مجموعة الطلاب الذين يدرسون الانجليزية كلغة أجنبية أولى، F مجموعة الطلاب الذين يدرسون الفرنسية كلغة أجنبية أولى. إذن:

$$v(E) = 30 ، v(F) = 12$$

وحيث أن $E \cap F = \emptyset$ ، إذن عدد طلاب الفصل هو:

$$v(E \cup F) = v(E) + v(F) = 30 + 12 = 42$$

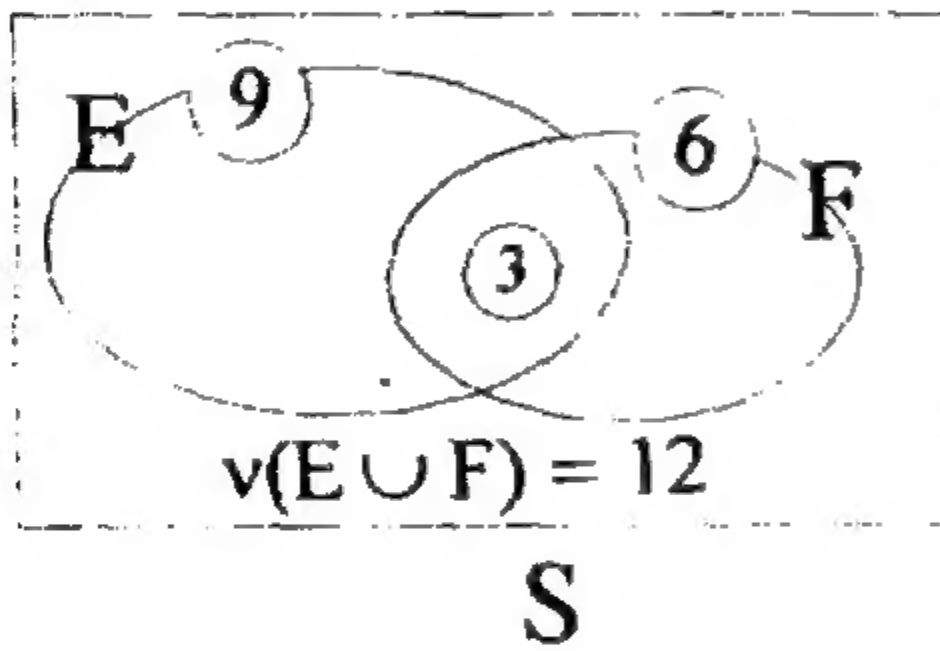
مثال (٢)

في مؤتمر نشر ترجمة واحد أن عدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية على الأقل يساوي ٩، وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية على الأقل يساوي ٦. فإذا كان العدد الكلي للمترجمين يساوي ١٢، أوجد عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا وعدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية فقط وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية فقط.

الحل

لتكن E مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الانجليزية ، F مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية . إذن عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا هو:

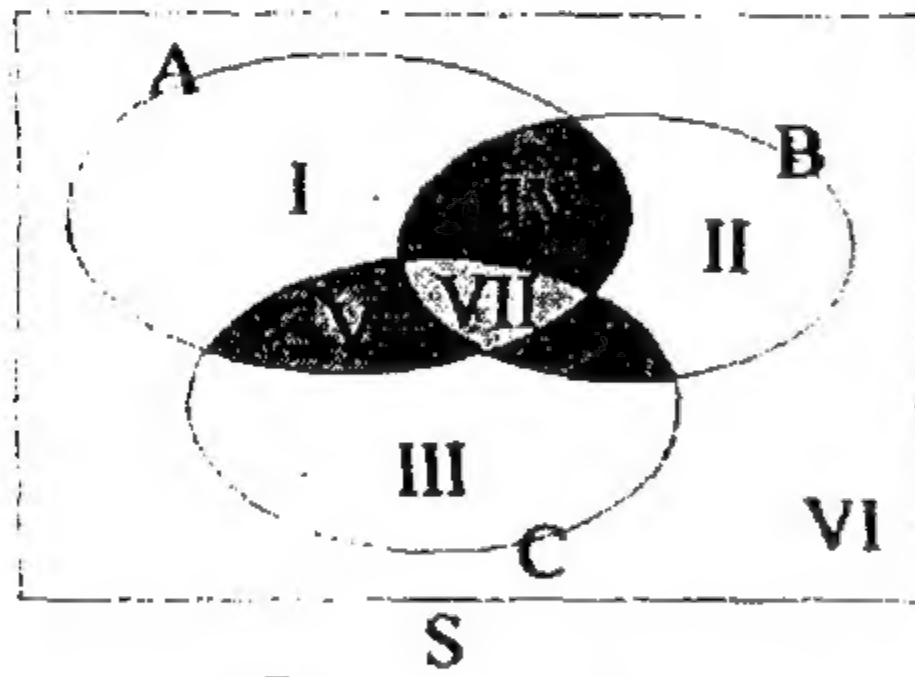
$$v(E \cap F) = v(E) + v(F) - v(E \cup F) = 9 + 6 - 12 = 3$$



الشكل الآتي يوضح المسألة: ←

من الشكل ينتج أن:

عدد المترجمين للغة الانجليزية فقط يساوي ٦ ،
عدد المترجمين للغة الفرنسية فقط يساوي ٣ .



(ج) إذا كانت A ، B ، C متقاطعة فإن:

$$v(A \cup B \cup C) = v(A) + v(B) + v(C)$$

$$- v(A \cap B) - v(A \cap C) - v(B \cap C)$$

$$+ v(A \cap B \cap C)$$

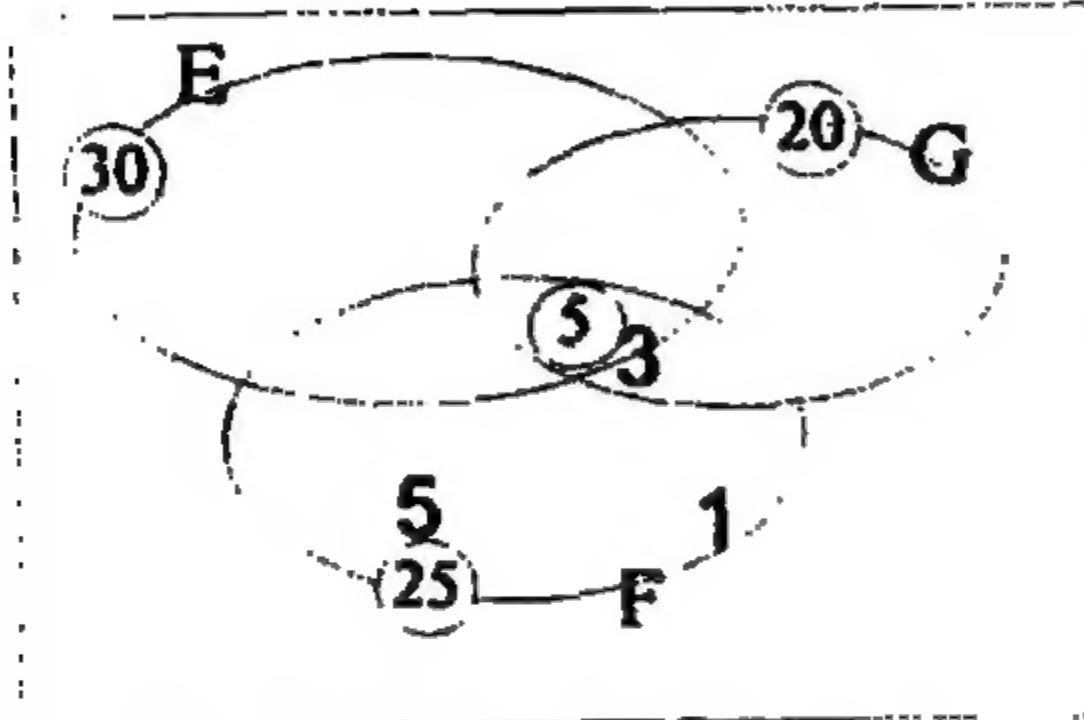
توضيح

الطرف الأيسر تمثله المنطقة الملونة في الشكل. ← والجدول الآتي يبين ذلك.

$v(A)$	=	$v(I)$			+ $v(IV)$	+ $v(V)$		+ $v(VII)$
$v(B)$	=		$v(II)$		+ $v(IV)$		+ $v(VI)$	+ $v(VII)$
$v(C)$	=			$v(III)$		+ $v(V)$	+ $v(VI)$	+ $v(VII)$
$-v(A \cap B)$	=				- $v(IV)$			- $v(VII)$
$-v(B \cap C)$	=						- $v(VI)$	- $v(VII)$
$-v(A \cap C)$	=					- $v(V)$		- $v(VII)$
$+v(C \cap B \cap A)$	=							+ $v(VII)$
R.H.S.	=	$v(I)$	+ $v(II)$	+ $v(III)$	+ $v(IV)$	+ $v(V)$	+ $v(VI)$	+ $v(VII)$

مثال

في مكتب للترجمة وجد أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل يساوي 30، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل يساوي 20، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل يساوي 25. فإذا علمت أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والألمانية على الأقل يساوي 8، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الألمانية والفرنسية على الأقل يساوي 6، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والفرنسية على الأقل يساوي 10، عدد الذين يجيدون الترجمة للغات الثلاث يساوي 5؛ فما هو العدد الكلي للمترجمين؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين دون الثالثة؟

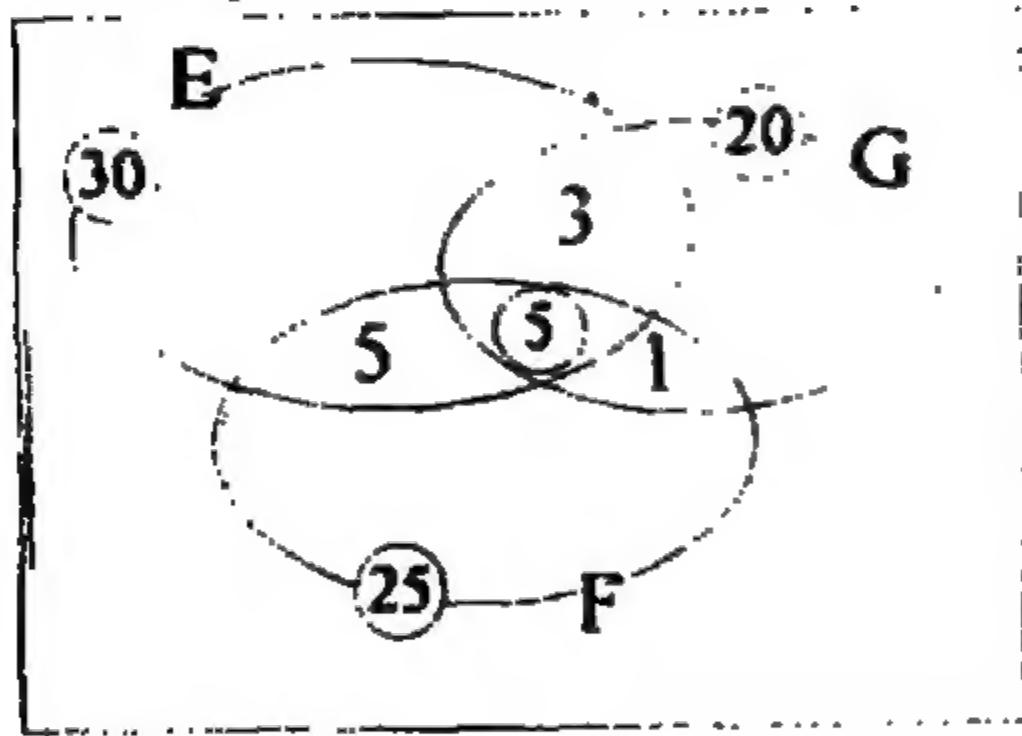


الحل

نفرض أن مجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل هي E ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل هي G ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل هي F. ←

واضح من الشكل أن عدد الذين يترجمون للإنجليزية والألمانية دون الفرنسية يساوي 8 - 5 أي 3، وعدد الذين يترجمون للألمانية والفرنسية دون الإنجليزية يساوي 6 - 5 أي 1 وعدد الذين يترجمون للإنجليزية والفرنسية دون الألمانية يساوي 10 - 5 أي 5

إذن تعدل الشكل إلى: ←



إذن عدد الذين يجيدون الترجمة إلى لغتين دون الثالثة يساوي:

$$3 + 1 + 5 = 9$$

إذن:

عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية فقط يساوي 30 - 3 - 5 - 5 أي 17
، عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية فقط يساوي 20 - 3 - 1 - 5 أي 11
، عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية فقط يساوي 25 - 5 - 1 - 5 أي 14

إذن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط يساوي :

$$17 + 11 + 14 = 42$$

$$42 + 9 + 5 = 56$$

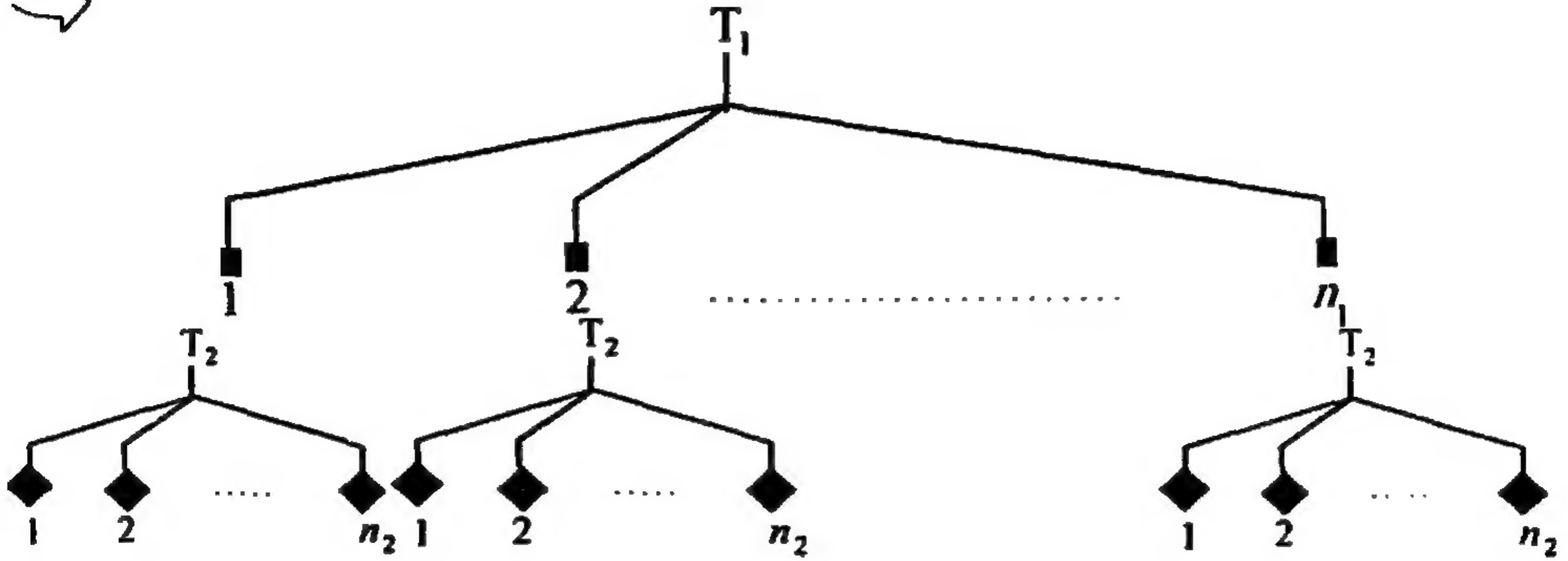
العدد الكلي للمترجمين يساوي :

أو بتطبيق القاعدة مباشرة يساوي:

$$30 + 20 + 25 - 8 - 6 - 10 + 5 = 56$$

٢-١ مبدأ العد Counting Principle

لنفرض أننا نريد إجراء عمليتين T_1 ، T_2 على التوالي، ولنفرض أن العملية T_1 يمكن إجراؤها بطرق عددها n_1 وأن العملية T_2 يمكن إجراؤها بطرق عددها n_2 ؛ فإن العملية $T_1 T_2$ (أي T_1 ، T_2 على التوالي) يمكن إجراؤها بطرق عددها $n_1 n_2$.



مثال (١)

كم عددا مكونا من رقمين (أحاد وعشرات)؟

الحل

رقم الأحاد يمكن اختياره من بين عشرة أرقام 0، 1، 2، ...، 9. أما رقم العشرات فيتم اختياره من بين تسعة أرقام فقط 1، 2، ...، 9. إذن يوجد $10 \times 9 = 90$ عدد مكون من رقمين.

مثال (٢)

يراد إعطاء أسماء لملفات برنامج للكمبيوتر بحيث يكون الاسم مكونا من حرف من الحروف الهجائية اللاتينية متبوعا برقم من 1 إلى 9. كم ملفا يمكن تسميته بهذه الطريقة؟

الحل

الشق الأول من الاسم يمكن كتابته بطرق عددها 26 وهو عدد الحروف اللاتينية، والشق الثاني يمكن كتابته بطرق عددها 9. إذن عدد الملفات التي يمكن تسميتها بهذه الطريقة يساوي $26 \times 9 = 234$.

مثال (٣)

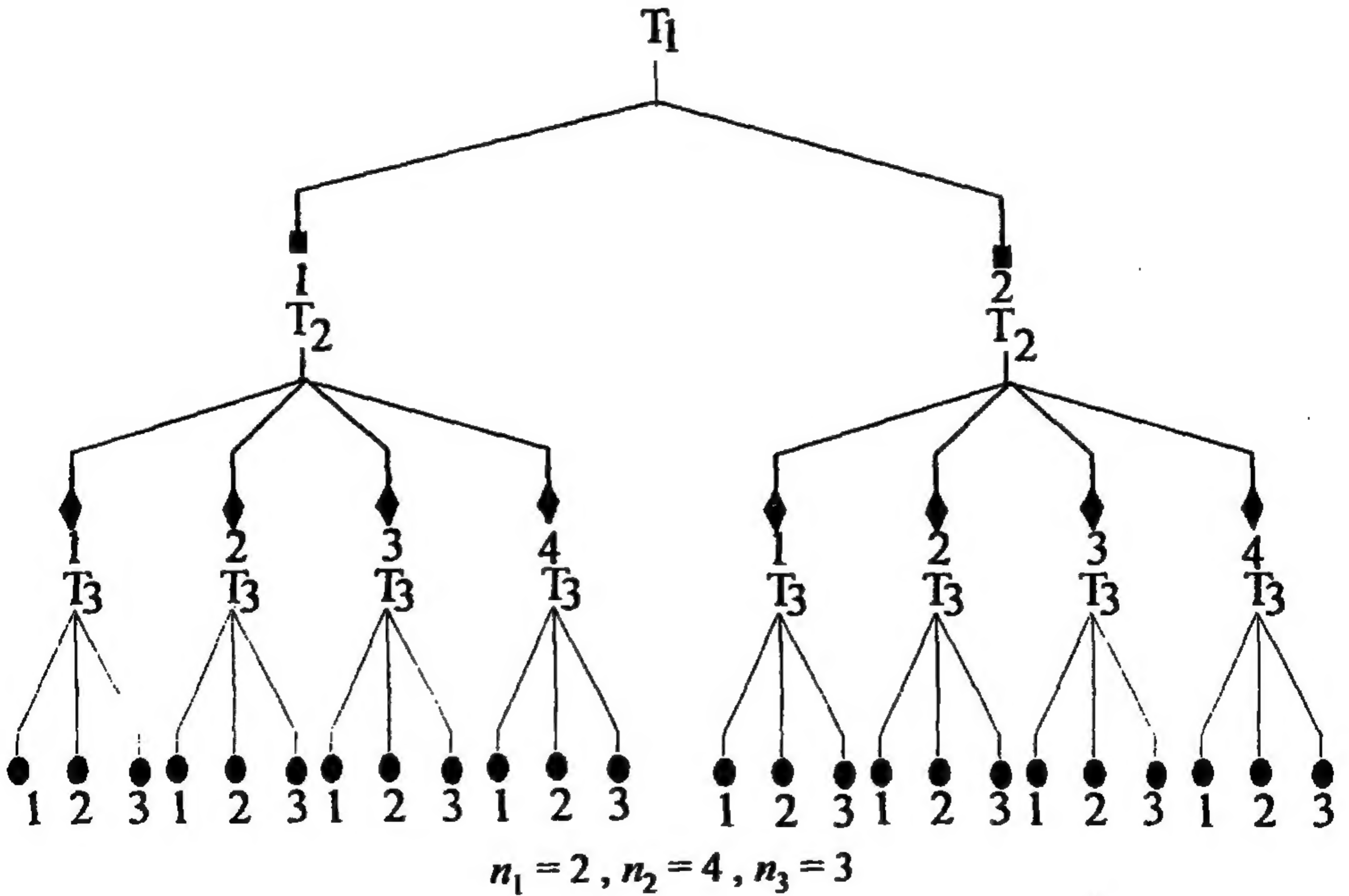
لمحطة سكة حديد خمسة أبواب. بكم طريقة يمكن لشخص الدخول ثم الخروج من باب غير الذي دخل منه؟

الحل

عدد طرق الدخول 5 ، وكل منها تقترن بأربعة طرق للخروج. إذن عدد طرق الدخول والخروج معا يساوى 54 أى 20.

٣-١ المبدأ العام للعد Extended Counting Principle
ينص المبدأ العام للعد على الآتى:

لنفرض عمليات T_1, T_2, \dots, T_m يمكن إجراؤها بطرق عددها n_1, n_2, \dots, n_m على الترتيب. فإن العملية المركبة $T_1 T_2 \dots T_m$ يمكن إجراؤها بطرق عددها $n_1 n_2 \dots n_m$.



مثال

يراد إعطاء أسماء لملفات برنامج للكمبيوتر بحيث يكون الاسم مكونا من حرفين من الحروف الهجائية اللاتينية متبوعا بثلاثة أرقام من 1 إلى 9. كم ملفا يمكن تسميته بهذه الطريقة؟

الحل

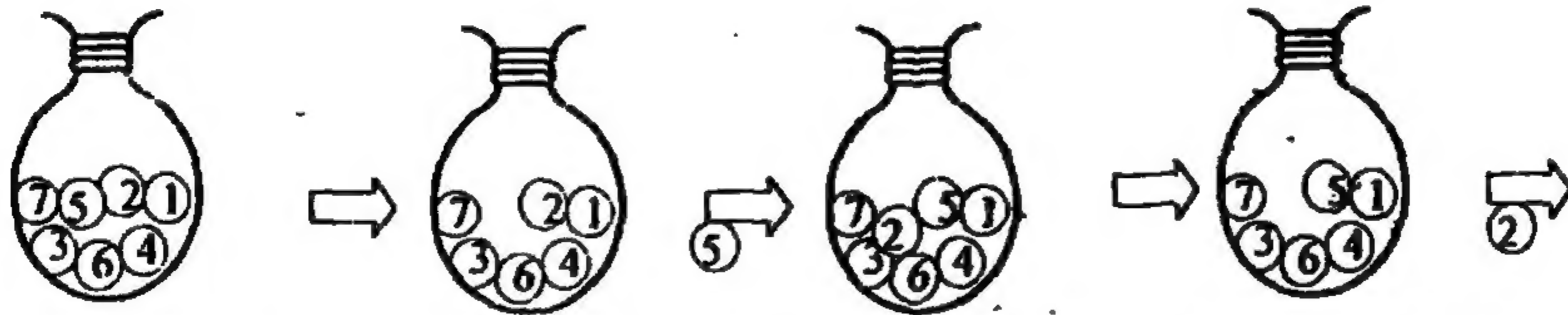
الحرف الأول من الشق الأول من الاسم يمكن كتابته بطرق عددها 26 وهو عدد الحروف اللاتينية، والحرف الثاني من الشق الأول من الاسم يمكن كتابته بطرق عددها 26. أما الشق الثاني من الاسم فيمكن كتابته بطرق عددها $9 \times 9 \times 9$. إذن عدد الملفات التي يمكن تسميتها بهذه الطريقة يساوي $(26)^2(9)^3$ أي 18252.

٤-١ التباديل والتوافيق Permutations and Combinations

لنفرض أننا لدينا n من الأشياء (العناصر) ونريد اختيار r منها. نستطيع أن نمثل عملية الاختيار بوضع n من الكرات المرقمة داخل كيس وسحب كرة من الكيس r من المرات. توجد طريقتان لهذا الاختيار:

١-٤-١ السحب مع الإحلال Selection with replacement

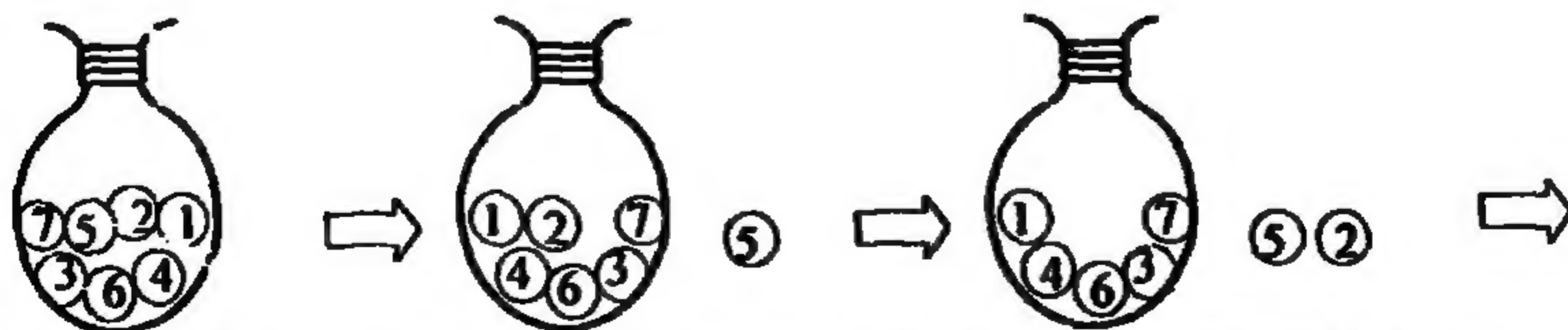
في هذه الطريقة نختار عنصرا من العناصر، ونسجل هذا العنصر، ثم نعيد هذا العنصر مرة ثانية إلى المجموعة، ثم نكرر هذه العملية r من المرات.



عدد طرق الاختيار مع الإحلال يساوي $(n)^r$ أي يساوي n^r .

٢-٤-١ السحب بدون إحلال Selection without replacement

نختار عنصرا من العناصر، ونسجل هذا العنصر، ثم نكرر هذه العملية r من المرات بدون إعادة العناصر إلى المجموعة.



في هذه الطريقة فإن السحبة الأولى تتم بطرق عددها n . وحيث أننا لانعيد الكرة ثانية إلى الكيس فإن السحبة الثانية تتم بطرق عددها $n - 1$ ، والسحبة الثالثة تتم بطرق عددها $n - 2$... وهكذا إلى أن نصل إلى السحبة رقم r فتتم بطرق عددها $n - r + 1$.

إنّ فإن عدد طرق الاختيار بدون إحلال يساوى . ويسمى هذا العدد تبديل n من العناصر r من المرات، ويرمز له بالرمز nP_r . أى أن:

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

وإذا كان $r = n$ فإننا نحصل على:

$${}^nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

وهذا العدد يسمى مضروب n ويرمز له بالرمز $n!$. أى أن:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

هذا، ومن السهل استنتاج العلاقة:

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (١)

بكم طريقة يمكن اختيار أربعة أوراق متتالية من أوراق الكوتشينة:
(أ) مع الإحلال؟ (ب) بدون إحلال؟

الحل

- (أ) عدد الطرق مع الإحلال يساوى $(52)^4$ أى 7311616.
(ب) عدد الطرق بدون إحلال يساوى ${}^{52}P_4$ أى $52 \times 51 \times 50 \times 49$ أى 6497400.
[لاحظ أن الاختيار $\boxed{\bullet} \boxed{\bullet\bullet} \boxed{\bullet\bullet\bullet} \boxed{\bullet\bullet\bullet\bullet}$ مثلا يختلف عن الاختيار $\boxed{\bullet\bullet\bullet\bullet} \boxed{\bullet\bullet\bullet} \boxed{\bullet\bullet} \boxed{\bullet}$.]

مثال (٢)

إذا رمى زهر طاولة أربع مرات وسجلت النتائج فى متتابعة، فكم متتابعة تتكون بهذه الطريقة؟

الحل



عدد المتتابعات يساوى 6^4 أى 1296.

مثال (٣)

إذا رمى زهرا طاوله متمثلان، فكم نتيجة مختلفة نحصل عليها؟

الحل

حيث أن الزهرين متمثلان، فإننا لا نستطيع التمييز بين الرمية  والرمية 

مثلاً. لذا تجب القسمة على عدد طرق ترتيب الزهرين فيما بينهما. أى على  

$$2! \text{ أى على } 2. \text{ إذن عدد النتائج المختلفة يساوى: } \frac{{}^6P_2}{2!} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$$

وبوجه عام فإن عدد طرق اختيار r من العناصر من n منها بدون ترتيب يسمى توفيق r من العناصر من n منها ويرمز له بالرمز nC_r حيث:

$${}^nC_r = \frac{1}{r!} {}^nP_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال (٤)

بكم طريقة يمكن اختيار أربع من

أوراق الكوتشينة إذا كان ترتيب الأوراق فيما بينها غير مطلوب؟

$${}^{52}C_4 = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2,598,960$$

الحل

عدد الطرق يساوى

مثال (٥)

كيس يحتوى على ثمان كرات حمراء وسبع كرات سوداء. بكم طريقة يمكننا اختيار خمس كرات من الكيس فى الحالات الآتية:

(أ) كل الكرات حمراء.

(ب) كل الكرات سوداء .

(ج) كرتان حمراوان وثلاث سوداء .

(د) ثلاث كرات حمراء واثنان سوداوان .

الحل

(أ) عدد الطرق يساوى 8C_5 أى 56.

(ب) عدد الطرق يساوى 7C_5 أى 21.

(ج) عدد الطرق يساوى ${}^8C_2 \times {}^7C_3$ أى 28×35 أى 980.

(د) عدد الطرق يساوى ${}^7C_2 \times {}^8C_3$ أى 21×56 أى 1,176.

مثال (٦)

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة من خمسة أعضاء ثم رئيس لهم من مجموعة من خمس عشرة فردا؟

الحل

عدد طرق اختيار اللجنة (بدون تحديد الرئيس) يساوى ${}^{15}C_5$ أى 5,005.

عدد طرق اختيار رئيس للجنة يساوى 6C_1 أى 6.

إن عدد طرق اختيار اللجنة يساوى ${}^{15}C_5 \times {}^6C_1$ أى 5005 × 6 أى 30,030.

ملاحظات

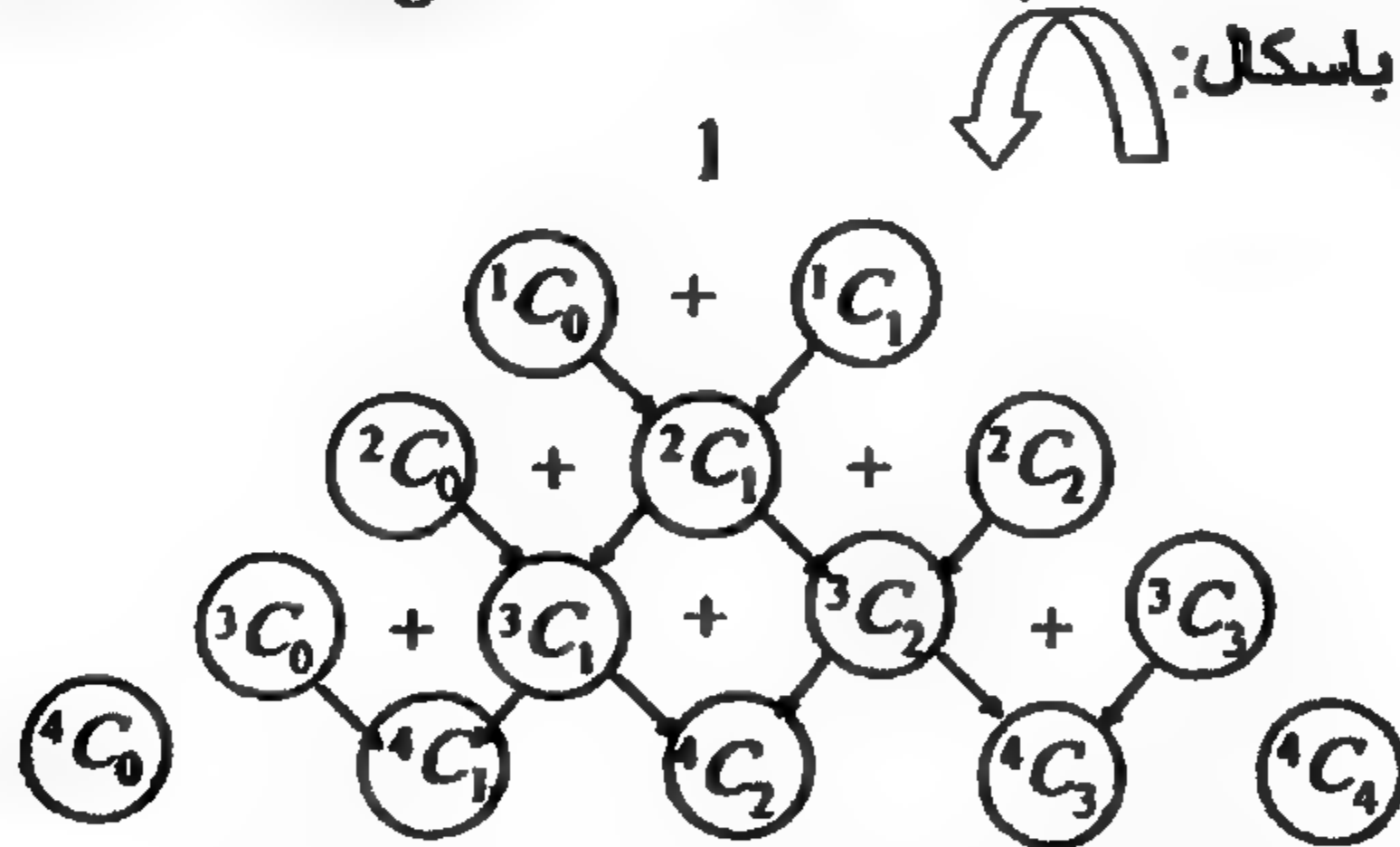
(أ) يمكن استنتاج الخاصيتين الآتيتين بكل سهولة:

$$\boxed{{}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1}} \quad , \quad \boxed{{}^nC_{n-r} = {}^nC_r}$$

والخاصية الأولى تفيد عندما تكون قيمة r قريبة من قيمة n فمثلا:

$${}^nC_{n-1} = {}^nC_1 = n \quad , \quad {}^nC_n = {}^nC_0 = 1 \quad , \quad {}^{15}C_{12} = {}^{15}C_3$$

أما الخاصية الثانية فتقود إلى نتيجة طريقة تسهل علينا حساب القيم الأولى للتوافق وهى المعروفة باسم مثلث باسكال *Pascal's triangle* نسبة إلى العالم الرياضى باسكال:



وهذا يعطى معاملات مفكوك ذى الحدين:

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + \dots + {}^nC_n b^n$$

كالآتى::

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

وبين الشكل الآتي معاملات ذى الحدين:



		1		1					
			1	2		1			
		1			3	3	1		
						6	4		1
1		4							

تمرين ١

- عشرون مريضاً ظهرت عليهم أعراض المرض x ، ثلاثون ظهرت عليهم أعراض المرض y ، خمسة ظهرت عليهم أعراض كلا المرضين. أوجد عدد المرضى.
- في حفل استقبال لمائة شخص وجد أن:
10 شربوا عصير البرتقال فقط، 30 شربوا عصير الليمون فقط، 15 شربوا مياه غازية فقط، 8 شربوا عصير البرتقال وعصير الليمون، 5 شربوا عصير البرتقال ومياه غازية، 6 شربوا عصير الليمون ومياه غازية، 4 شربوا الأنواع الثلاثة. بفرض أن الشارب لا يكرر الشرب من نوع واحد أوجد:
(أ) عدد كؤوس عصير البرتقال. (ب) عدد كؤوس عصير الليمون.
(ج) عدد زجاجات المياه الغازية. (د) عدد الذين لم يتناولوا أى مشروبات.

في عينة مكونة من 57 طالبا وجد أن 36 طالب يلعبون كرة القدم، 30 يلعبون كرة السلة، 25 يلعبون التنس، 6 طلاب يلعبون الثلاثة ألعاب. فإذا كان عدد الطلبة الذين يلعبون كرة القدم والسلة يساوي عدد الطلبة الذين يلعبون القدم والتنس، عدد الطلبة الذين يلعبون السلة والتنس يساوي نصف عدد الطلبة الذين يلعبون كرة القدم والسلة أوجد:

(أ) عدد الطلاب الذين يلعبون لعبة واحدة فقط.

(ب) عدد الطلاب الذين يلعبون لعبتين فقط.

نسخة من جريدة "الجمهورية". أجرى إحصاء عن موظفي الدائرة فوجد أن 20 موظفا يقرأون "الأهرام" فقط، 18 موظفا يقرأون "الأخبار" فقط، 15 موظفا يقرأون "الجمهورية" فقط، 6 موظفين يقرأون الصحف الثلاث. أوجد عدد الذين يقرأون صحيفتين دون الثالثة وعدد موظفي الدائرة.

ألقيت عملة أربع مرات وسجل الأعلى للعملة كل مرة. كم متتابعة من الصور (H) والكتابة (T) نحصل عليها؟

قائمة طعام في مطعم تتكون من أربعة أطباق : طبق حساء ، الطبق الرئيسي ، طبق الحلويات ، طبق المشهيات. فإذا كان عدد اختيارات الحساء 4 ، الطبق الرئيسي 5 ، الحلويات 3 ، المشهيات 2 فكم قائمة يمكن أن يقدم المطعم؟

ألقي زهر طاولة أربع مرات وسجلت الأرقام التي تظهر على الوجه الأعلى في متتابعة. كم متتابعة يمكن أن نحصل عليها؟

احسب كلا من nP_n ، ${}^nP_{n-2}$ ، ${}^nP_{n-1}$ ، 7P_2 ، 6P_1 ، 4P_3 .

أوجد الفرق بين 7P_4 ، 8P_3 . ١٠ . اختصر $\frac{13!}{11!} + \frac{12!}{10!}$.

إذا كان ${}^{n+1}P_2 = 110$ أوجد n . ١٢ . إذا كان ${}^nP_4 = {}^{n+1}P_3$ أوجد n .

١٣. بكم طريقة يمكن أن يجلس ستة تلاميذ وست تلميذات في صف واحد:
- (أ) بدون أى قيد. (ب) تلميذ - تلميذة - تلميذ - تلميذة - ...
١٤. أوجد عدد تبديلات الحروف في الكلمة "group".
١٥. بكم طريقة يمكن أن يجلس ستة أشخاص على مائدة مستديرة ذات ستة مقاعد؟
١٦. خصص رف في مكتبة ليعرض فيه ستة كتب جديدة. فإذا كان لدينا 8 كتب في الحاسب نختار من بينها 4 ، 5 كتب في اللغة الإنجليزية نختار من بينها 2 فبكم طريقة يمكن أن نعرض فيها الكتب إذا كانت الكتب من نوع واحد تعرض متجاورة؟
١٧. احسب كلا من 7C_7 ، 7C_4 ، 6C_5 ، ${}^nC_{n-1}$ ، ${}^nC_{n-2}$ ، ${}^{n+1}C_{n-1}$.
١٨. إذا كان ${}^{20}C_{n+1} = {}^{20}C_{3n+1}$ أوجد n .
١٩. بكم طريقة يمكن نختار لجنة من ثلاثة أعضاء هيئة التدريس وطالبين وذلك من سبعة أعضاء هيئة التدريس وثمانية طلاب؟
٢٠. مصنع لإنتاج الحاسبات يخطط لحملة إعلامية من ستة إعلانات. فإذا كان لدينا ستة مجلات ، ثلاثة صحف ، قناتين للتلفزيون ، أربع محطات إذاعية فبكم طريقة يمكن أن تنفذ الحملة الإعلامية في الحالتين الآتيتين:
- (أ) كلها في المجلات؟ (ب) ٢ في المجلات ، ٢ في الصحف ، ١ في التلفزيون
٢١. بكم طريقة يمكن اختيار ثمانية أوراق كوتشينة: خمس لونها أحمر ، ثلاث لونها أسود؟
٢٢. كيس يحتوي على ١٥ كرة: ثمانية منها حمراء ، سبعة سوداء. بكم طريقة يمكن أن نختار خمس كرات من الكيس بحيث:
- (أ) كلها حمراء (ب) كلها سوداء (ج) ٢ حمراء (د) ٢ سوداء

الدرس الثاني

نظرية الاحتمالات (١)

THEORY OF PROBABILITY (1)

١-٢ التجربة العشوائية Random Experiments

هي تجربة نستطيع أن نحدد مقدما (قبل إجرائها) جميع النواتج *outcomes* الممكنة لها مع عدم استطاعتنا التنبؤ أي من هذه النواتج سوف يتحقق فعلا بعد إجراء التجربة.

مثال (١)

عند إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة الوجه الظاهر فالنواتج الممكنة هي:

صورة *head H* ، كتابة *tail T*

مثال (٢)

عند إلقاء حجر نرد (زهر طاولة) مرة واحدة وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي فالنواتج الممكنة هي:



مثال (٣)

عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين وملاحظة الوجهين الظاهرين فالنواتج الممكنة هي *HH, HT, TH, TT*.

٢-٢ فضاء النواتج (فضاء العينة) Space of Outcomes (Sample Space)

هو مجموعة كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية. سنرمز لفضاء النواتج بالرمز *S*.

مثال (١)

فضاء النواتج في تجربة إلقاء عملة مرة واحدة هو:

$$S = \{H, T\}$$

مثال (٢)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة هو:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال (٣)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء عملة مرتين هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

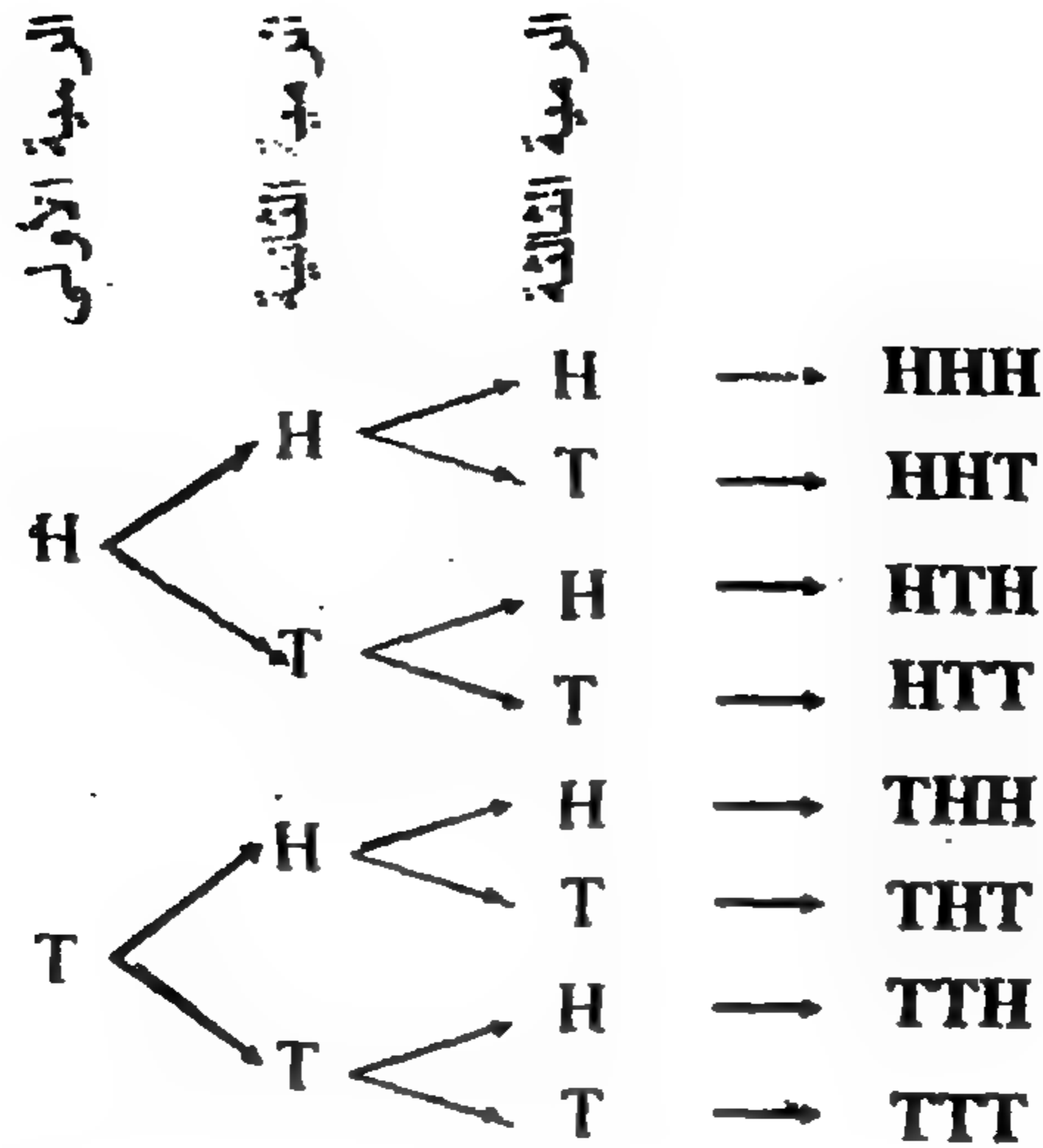
مثال (٤)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء عملة ثلاث مرات هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$



ويمكن استنتاج فضاء النواتج لهذه التجربة كالآتي:



ويعرف هذا الشكل بـ شجرة الاحتمالات *probability tree*

الزهر الثاني

	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

مثال (٥)

فضاء النواتج لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين (أو حجرى نرد متمايزين مرة واحدة) ينتج من

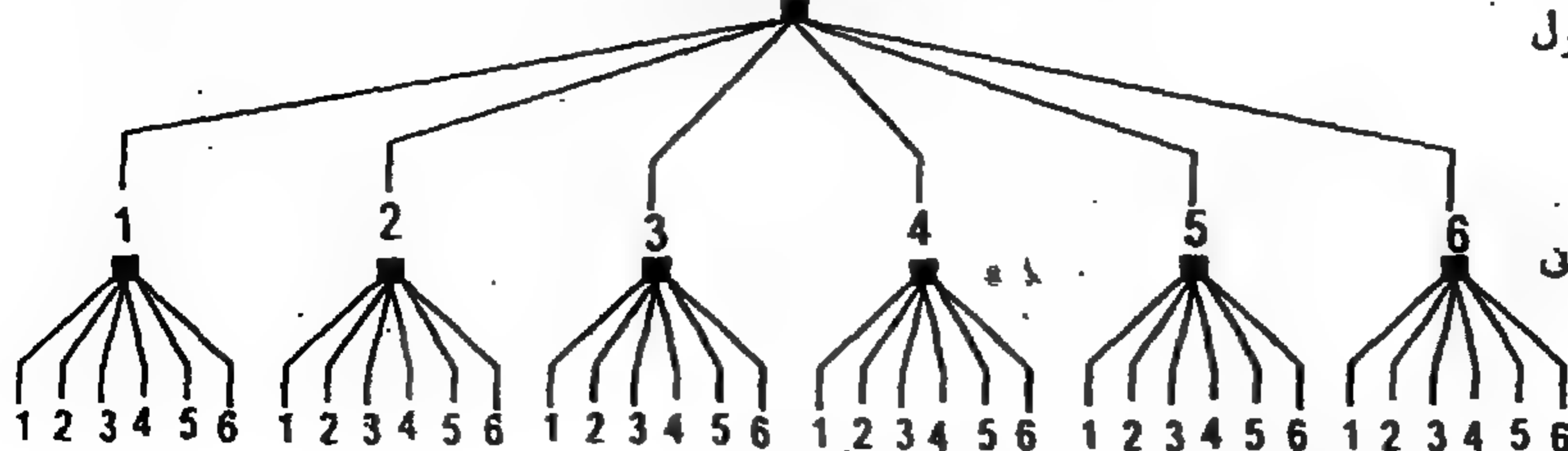
الشكل الآتى: ←

كما يمكن استنتاجه من الشجرة الآتية:

الزهر الأول

الزهر الأول

الزهر الثاني



لذا فإن فضاء النواتج لهذه التجربة هو:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ \dots, \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

٣-٢ الأحداث Events

الحدث *event* هو مجموعة جزئية من فضاء النواتج . وغالبا يكون الحدث له معنى يمكن التعبير عنه.
مثال (١)

في تجربة إلقاء عملة مرتين يمكن أن نعرف الأحداث الآتية:

$E_1 = \{HH\}$	ظهور صورتين بالضبط هو الحدث
$E_2 = \{HH, HT, TH\}$	ظهور صورة واحدة على الأقل هو الحدث
$E_3 = \{HT, TH, TT\}$	ظهور صورة واحدة على الأكثر هو الحدث
$E_4 = \{HT, TH\}$	ظهور صورة واحدة بالضبط هو الحدث
$E_5 = \{HH, TT\}$	ظهور وجهين متشابهين هو الحدث

مثال (٢)

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة يمكن أن نعرف الأحداث الآتية:

$O = \{1,3,5\}$	ظهور عدد فردي هو الحدث
$E = \{2,4,6\}$	ظهور عدد زوجي هو الحدث
$P = \{2,3,5\}$	ظهور عدد أولي هو الحدث

١-٣-٢ الحدث المؤكد The Certain Event

باعتبار فضاء النواتج مجموعة جزئية من نفسه فإنه يعتبر حدثا من الأحداث يسمى الحدث المؤكد *certain event* وذلك لأنه يحتوى جميع النواتج الممكنة.

٢-٣-٢ الحدث المستحيل The Impossible Event

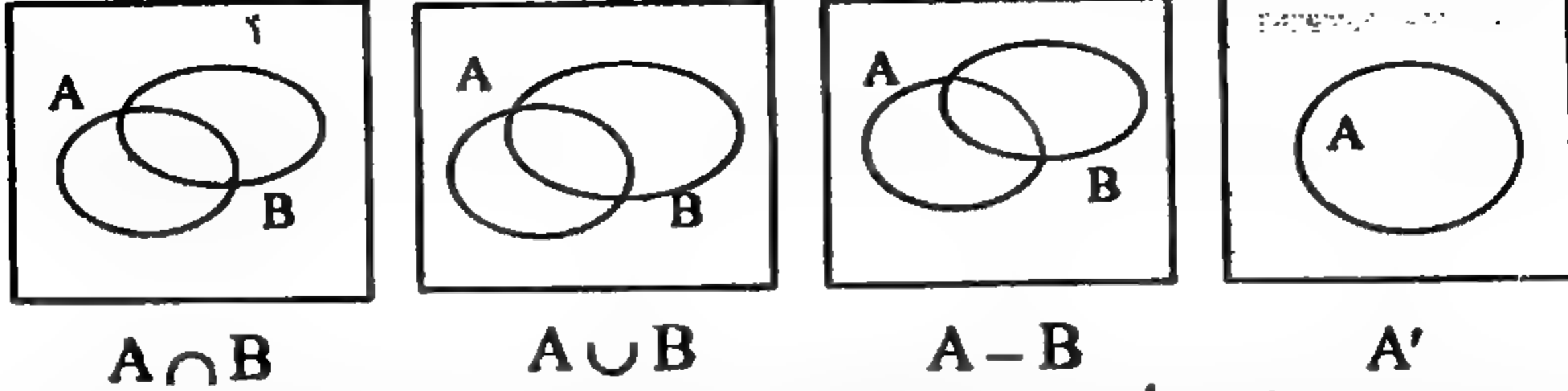
باعتبار المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من فضاء النواتج فإنها تعتبر حدثا من الأحداث يسمى الحدث المستحيل *impossible event*.

٣-٣-٢ الأحداث الأولية Simple Events

المجموعة التى تتألف من عنصر (نتاج) واحد من فضاء النواتج تسمى حدثا أوليا (بسيطا) *simple event*.

٤-٢ جبر الأحداث Algebra of Events

باعتبار الأحداث مجموعات جزئية من فضاء النواتج فإنها تخضع لجميع العمليات الجبرية للمجموعات من تقاطع واتحاد وفرق وتكميل ... إلخ. ونستطيع أن نستعين بأشكال فن حيث يعتبر فضاء النواتج S نفسه بمثابة المجموعة الشاملة.



هذا، وتسرى على الأحداث جميع قوانين جبر المجموعات من دمج وإبدال ومحاييد ومعكوس ... إلخ والتي سبقت دراستها. فمثلا لأي ثلاثة أحداث E_1, E_2, E_3 فإن:

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$

(قانونا الدمج)

$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3),$$

(قانونا التوزيع)

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$

(قانونا دي مورجان) $(E_1 \cap E_2)' = E_1' \cup E_2'$, $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cap E_2'$

وهذه القوانين تفيد في التعامل مع أحداث مركبة من أخرى بسيطة.

مثال (١)

في تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين أكتب كلا من الأحداث الآتية:

- A : مجموع الوجهين يساوى 3 ، B : مجموع الوجهين يساوى 7
C : مجموع الوجهين يساوى 3 أو 7 ، D : مجموع الوجهين يساوى 3، 7

الحل

فضاء النواتج هو:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ \dots, \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$A = \{(1,2), (2,1)\},$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6, 1)\}.$$

$$C = A \cup B = \{(1,2), (2, 1), (1,6), (2, 5), (3,4), (4,3), (5,2), (6, 1)\}$$

$$D = A \cap B = \phi \text{ حدث مستحيل}$$

٥-٢ الأحداث المتنافية Mutually Exclusive Events

يقال لحدثين E_1 ، E_2 أنهما متنافيان لبعضهما البعض إذا استحال وقوعهما معا ، أي إذا كانت المجموعتان E_1 ، E_2 متباعدتين، أي إذا كن:

$$E_1 \cap E_2 = \phi$$

ويقال لعدة أحداث E_1 ، E_2 ، ... ، E_n أنها متنافية إذا كانت متنافية متتالية متتالية، أي إذا كن:

$$E_i \cap E_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

ملحوظة (١)

الأحداث الأولية متنافية.

ملحوظة (٢)

أي حدث E ومكمله E' هما حدثان متنافيان.

مثال (١)

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن الحدثين "ظهور عدد زوجي" ، "ظهور عدد فردي" هما حدثان متنافيان وذلك لأن $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \phi$.
في حين أن الحدثين $E_1 = \{1,2,3,4\}$ ، $E_2 = \{3,4,5,6\}$ غير متنافيين حيث أن $E_1 \cap E_2 = \{3,4\} \neq \phi$.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء عملتين متميزتين مرة واحدة فإن الحدثين E_1 "الوجهان متشابهان" ، E_2 "الوجهان مختلفان" هما حدثان متنافيان وذلك لأن:

$$E_1 = \{HH, TT\} , E_2 = \{HT, TH\} , E_1 \cap E_2 = \phi$$

في حين أن الحدثين E_3 "صورة على الأقل" ، E_4 "صورة واحدة على الأكثر" غير متنافيين حيث أن:

$$E_3 = \{HH, HT, TH\} , E_4 = \{HT, TH, TT\} , E_3 \cap E_4 = \{HT, TH\} \neq \phi .$$

مثال (٣)

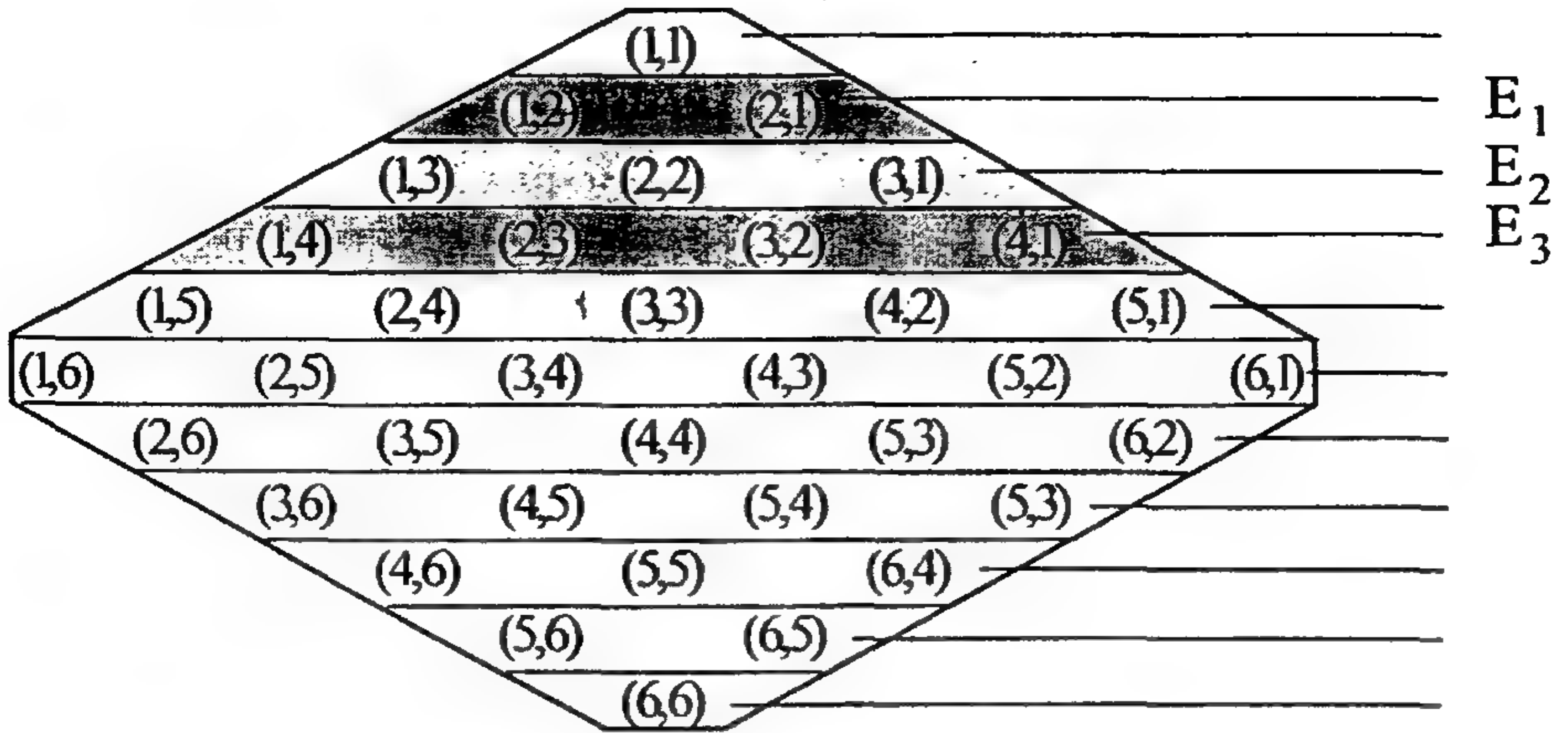
في تجربة إلقاء حجري نرد متميزين مرة واحدة فإن الأحداث:

$$E_1 = \{(1,2), (2,1)\} \text{ "مجموع الوجهين يساوي 3"}$$

$$E_2 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \text{ "مجموع الوجهين يساوي 4"}$$

$$E_3 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \text{ "مجموع الوجهين يساوي 5"}$$

هي أحداث متنافية.



٦-٢ الأحداث الشاملة (المستنفذة) Exhaustive Events ^S

يقال لمجموعة الأحداث $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ أنها شاملة (مستنفذة) إذا كان اتحاد عناصرها هو فضاء النواتج، أي إذا كان:

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$$

يقال لمجموعة الأحداث $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ أنها تجزىء لفضاء النواتج إذا كانت شاملة ومتنافية معاً، أي إذا كان:

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S, \quad E_i \cap E_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

مثال (١)

في تجربة إلقاء عملتين متميزتين مرة واحدة فإن مجموعة الأحداث:

$$\{\{HH\}, \{HT, TH\}, \{TT\}\}$$

هي تجزىء لفضاء النواتج؛

في حين أن كلا من المجموعتين:

$$\{\{HH\}, \{TT\}\}, \quad \{\{HH\}, \{HT\}, \{TH, TT\}\}$$

ليست تجزىء لفضاء النواتج.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء حجر نرد فإن مجموعة الأحداث:

$$\{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}\}$$

هي تجزىء لفضاء النواتج في حين أن المجموعة:

$$\{\{1,2\}, \{2,3,4\}, \{4,5,6\}\}$$

ليست تجزىء (وإن كانت شاملة).

٦-٢ التعريف التقليدي للاحتمال The Classical Approach to Probability

لنفرض 10 طلاب $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ ؛ ولتكن أطوالهم بالسنتيمتر مبينة بالجدول الآتي:

الطالب	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
الطول	160	150	170	160	170	180	190	160	155	150

لنفرض أننا كتبنا الحروف $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ كلا في ورقة وطوينا هذه الورقات ووضعناها في كيس ثم سحبنا ورقة من الورقات من الكيس بطريقة عشوائية. ما هي فرصة أن يكون طول الطالب المكتوب اسمه على الورقة يساوي 160 سنتيمتر؟ لدينا في القائمة 3 طلاب من الـ 10 بهذا الطول. نستطيع أن نقول إذن أن الفرصة تساوي أي 0.3؛ وبلغة أخرى نقول أن احتمال أن يكون طول الطالب 160 سنتيمتر يساوي 0.3. وبوجه عام:

إذا كان عدد عناصر حدث ما E يساوي m وكان عدد عناصر فضاء النواتج يساوي n وكل منها له نفس فرصة الظهور فإن احتمال وقوع الحدث هو:

$$P(E) = m/n$$

ملحوظة







إذا أخذنا كل فئات الأطوال وهي 150، 155، 160، 170، 180، 190 فإننا نستطيع أن نكون جدول الاحتمالات الآتي:

الطول	150	155	160	170	180	190
الاحتمال	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.1







نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1.

٧-٢ التعريف التجريبي للاحتمال The Experimental Approach to Probability







لنفرض أننا ألقينا زهر طاولة 36 مرة ولاحظنا الوجه الأعلى للزهر فوجدناه مبينا بالجدول الآتي:

الوجه						
التكرار	5	6	8	7	4	6

فإن فرص ظهور الأوجه الستة للزهر تكون كما يلي:

الوجه						
الفرصة	5/36	6/36	8/36	7/36	4/36	6/36

لنفرض أننا لم نكتف بإلقاء الزهر 36 مرة وألقيناه 360 مرة ولاحظنا الوجه الأعلى للزهر فوجدناه مبينا بالجدول الآتي:

						الوجه
61	59	63	57	62	58	التكرار

فإن فرص ظهور الأوجه الستة للزهر تصبح كما يلي:

						الوجه
61/360	59/360	63/360	57/360	62/360	58/360	الفرصة

نلاحظ أن كل فرصة قد اقتربت من $1/6$ وكلما زدنا عدد مرات رمي الزهر كلما اقتربنا أكثر من هذه القيمة حتى إذا زاد العدد إلى ما لانهاية فإن كل الفرص تساوى احتمال ظهور الوجه ويساوى $1/6$. وهذا هو المفهوم التجريبي للاحتمال.

٨-٢ التعريف الرياضى للاحتمال The Mathematical Definition of Probability

ليكن S هو فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما. فإن لكل حدث $A \subset S$ يوجد عدد حقيقى $P(A)$ يسمى "احتمال الحدث A " "Probability of the event A " ويحقق المسلمات الآتية:

(١) احتمال أى حدث يقع بين 0 ، 1 . أى أن $0 \leq P(A) \leq 1$

(٢) احتمال الحدث المؤكد يساوى 1 . أى أن $P(S) = 1$

(٣) إذا كان A ، B حدثين متنافيين أى $A \cap B = \phi$ فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ويمكن أن نعمم المسلمة (٣) لتشمل عددا محدودا من الأحداث المتنافية E_1, E_2, \dots, E_n كالآتى:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$$

وإذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n أحداثا متنافية وشاملة، فإن:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1$$

لتفرض الآن أن فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما هو:

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

وحيث أن الأحداث الأولية:

$$\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_n\}$$

هي أحداث متنافية، لذا فإن:

$$P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}) = P\{e_1\} + P\{e_2\} + \dots + P\{e_n\} = 1$$

فإذا كانت الأحداث الأولية متساوية الاحتمال *equally likely* فإن:

$$P\{e_1\} = P\{e_2\} = \dots = P\{e_n\} = 1/n$$

كذلك فإنه إذا احتوى الحدث E على عدد m من النواتج فإن:

$$P(E) = m/n$$

مثال (١)

في تجربة إلقاء عملة معدنية منتظمة فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{H, T\}$$

لذا فإن:

$$P(\{H\}) = 1/2, \quad P(\{T\}) = 1/2$$

مثال (٢)

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

لذا فإن:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = 1/6,$$

$$P(\{1, 2\}) = P(\{4, 5\}) = 2/6 = 1/3,$$

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(\{2, 4, 6\}) = 3/6 = 1/2.$$

مثال (٣)

في تجربة إلقاء عملة معدنية منتظمة مرتين فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

لذا فإن:

$$P(\{HH, TT\}) = 1/2, \quad P(\{HH, HT, TH\}) = 3/4, \quad P(\{HT, TH\}) = 1/2$$

مثال (٤)

في تجربة إلقاء عملة معدنية منتظمة ثلاث مرات فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ويكون احتمال ظهور صورتين على الأقل هو:

$$P(\{HHH, HHT, HTH, THH\})$$

ويساوي $1/2$ ؛ واحتمال ظهور صورتين على الأكثر هو:

$$P(\{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\})$$

ويساوي $7/8$. أما احتمال ظهور صورتين بالضبط فهو:

$$P(\{HHT, HTH, THH\})$$

ويساوي $3/8$.

مثال (٥)

إذا كان احتمال ظهور الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 في نرد غير منتظم كالآتي:

$$P\{1\} = 0.12, \quad P\{2\} = 0.15, \quad P\{3\} = 0.17,$$

$$P\{4\} = 0.17, \quad P\{5\} = 0.18, \quad P\{6\} = 0.21$$

أوجد احتمال ظهور عدد أولى.

الحل

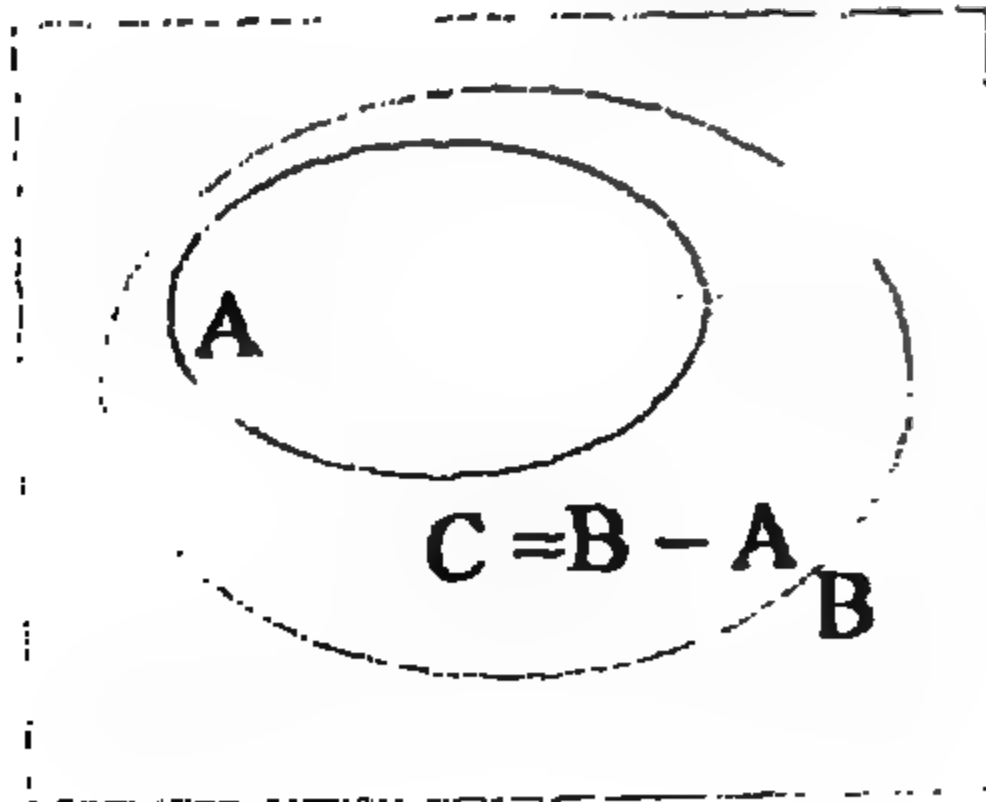
$$P\{2, 3, 5\} = 0.15 + 0.17 + 0.18 = 0.5$$

٩-٢ نظريات هامة في الاحتمالات

نظرية (١)

ليكن A ، B حدثين في S ، وليكن $A \subset B$ فإن:	
$P(A) \leq P(B)$	(i)
$P(B - A) = P(B) - P(A)$	(ii)
$P(\phi) = 0$	(iii)

البرهان



لنفرض أن $A \subset B$ ، $C = B - A$.
وحيث أن $A \cap C = \phi$ ، إذن:

$$B = A \cup C, \quad P(B) = P(A) + P(C) \quad \text{(مسلمة (٢))}$$

$$\therefore P(C) = P(B) - P(A) \therefore P(A) \leq P(B)$$

$$\therefore P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$P(\phi) = 0 \quad \text{بوضع } A = B \text{ ينتج أن :}$$

نظرية (٢)

ليكن A ، B حدثين في S فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

البرهان

انظر الشكل الذي إلى اليسار: \leftarrow

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - (A \cap B)))$$

ولكن الحدثان A ، $B - (A \cap B)$ متنافيان.

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B - (A \cap B))$$

وحيث أن $(A \cap B) \subset B$ ، إذن من نظرية (١) ينتج أن:

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (١)

في تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين نلاحظ الآتى:

الحدث مجموع الوجهين أكبر من 6 هو:

$$A = \{(1,6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

الحدث الفرق بين الوجهين أقل من 2 هو:

$$B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, \quad P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$(A \cap B) = \{(3,4), (4,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{21}{36} + \frac{16}{36} - \frac{9}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

مثال (٢)

وجد صاحب ورشة لإصلاح الفرامل وضبط الموتور أن احتمال أن تحتاج أى سيارة إلى ضبط الموتور يساوى 0.6 واحتمال أن تحتاج السيارة إلى إصلاح للفرامل يساوى 0.1 وأن تحتاج السيارة إلى كلى العاملين يساوى 0.02.

- (أ) ما هو احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل؟
 (ب) ما هو احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور وليس إصلاح الفرامل؟
 (ج) ما هو احتمال ألا تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل؟

الحل

نفرض أن A: السيارة تحتاج إلى ضبط الموتور ، B : السيارة تحتاج إلى إصلاح الفرامل. إذن:

- (أ) احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.1 - 0.02 = 0.68$$

 (ب) احتمال أن تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور وليس إصلاح الفرامل هو:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.02 = 0.58$$

 (ج) احتمال ألا تحتاج السيارة إلى ضبط الموتور أو إصلاح الفرامل هو:

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.68 = 0.32$$

نظرية (٣)

$$P(A) + P(A') = 1$$

البرهان

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \phi$$

$$\therefore P(S) = 1 = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$\therefore P(A) + P(A') = 1$$

نظرية (٤)

$$P(A) + P(A') = 1$$

البرهان

إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_n أحداثاً شاملة ومتنافية فإن:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

مثال (١)

يحتوى صندوق على ٦ كرات بيضاء و ٣ كرات سوداء و ٧ كرات حمراء.
سحبت كرة عشوائية، احسب احتمالات كل مما يأتى:

(ب) B : الكرة حمراء

(أ) A : الكرة بيضاء

(د) D : الكرة بيضاء أو حمراء

(ج) C : الكرة ليست بيضاء

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{7}{16}$$

$$P(C) = 1 - P(A)$$

$$P(D) = P(A) + P(B)$$

$$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = \frac{13}{16}$$

مثال (٢)

رمى حجرا نرد منتظمين ومتمايزين. إذا كان:

A : مجموع الوجهين أكبر من أو يساوى 10،

B : الفرق بين الوجهين أقل من أو يساوى 1. أوجد:

(ب) $P(B')$

(أ) $P(A)$

(د) $P(A \cup B)$ ، $P(A \cap B)$

(ج) $P(A - B)$

الحل

$$A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), \\ (4,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$\therefore P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} , \quad P(B') = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$A - B = \{(4,6), (6,4)\}$$

$$\therefore P(A - B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A \cap B = \{(5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

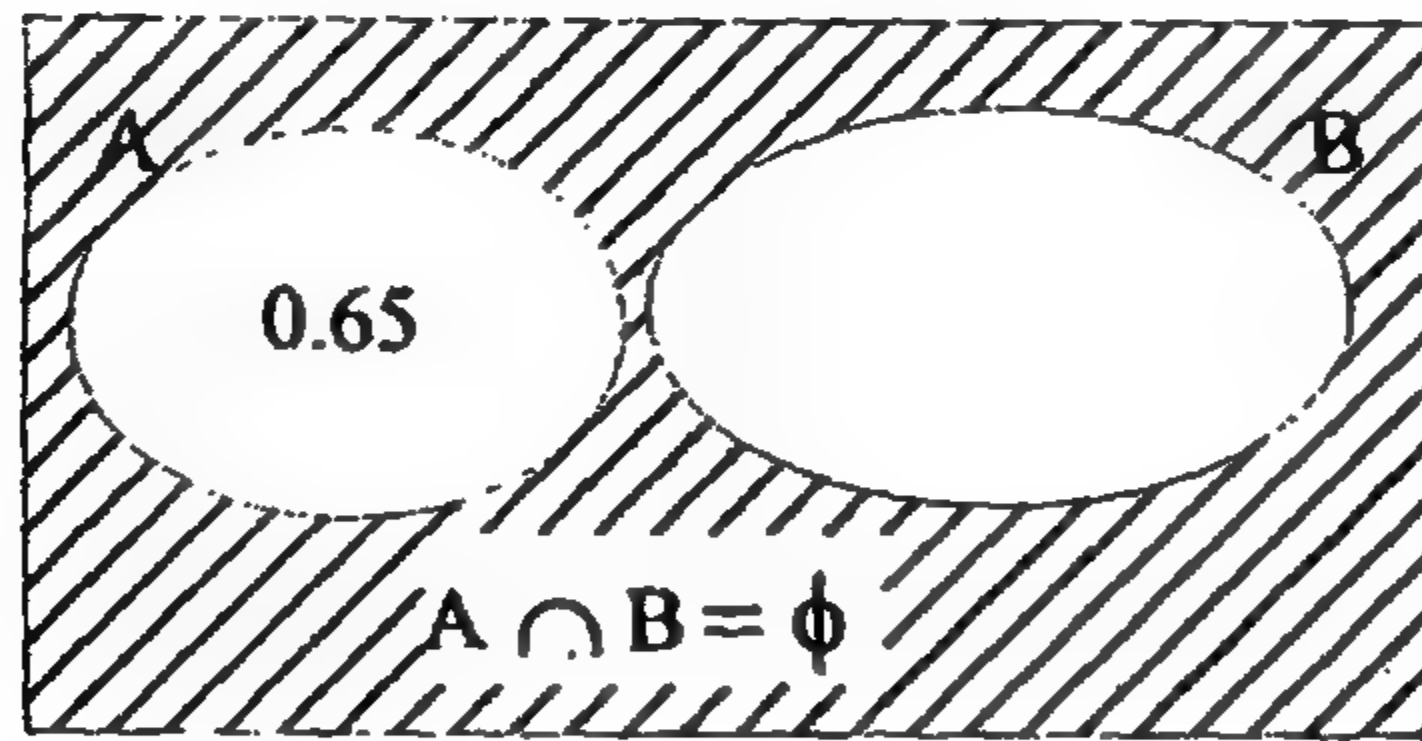
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال (٣)

إذا كان احتمال أن يكسب فريق كرة قدم يساوي 0.65 واحتمال أن يتعادل يساوي 0.05 فما هو احتمال أن يخسر؟

الحل

نفرض أن الحدث: الفريق يكسب هو A ، الحدث: الفريق يخسر هو B . وحيث أن الفريق لا يمكن أن يكسب ويخسر في آن واحد، إذن A ، B متناقضان بالتبادل. نرسم الشكل الآتي:



الحدث: الفريق يتعادل يمثل بالمنطقة المظللة. أي $(A \cup B)'$.

$$\therefore P(A \cup B)' = 0.05$$

$$\therefore P(A \cup B) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\therefore P(A) + P(B) = 0.95$$

$$\therefore P(B) = 0.95 - P(A) = 0.95 - 0.65 = 0.30$$

إذن احتمال أن يخسر الفريق يساوي 0.3

تمرين ٢

١. سحبت ورقة كوتشينة من مجموعة قياسية. أكتب عناصر فراغ النواتج في الحالات الآتية:

(أ) إذا كنا مهتمين بلون الورقة (أحمر - أسود).

(ب) إذا كنا مهتمين بنوع الورقة (\spadesuit ، \clubsuit ، \heartsuit ، \diamondsuit).

٢. أكتب فراغ النواتج لكل من التجارب العشوائية الآتية:

(أ) إلقاء عملة مرتين ثم إلقاء زهر طاولة مرة واحدة.

(ب) إنجاب ثلاثة أطفال وكل طفل إما أن يكون ولدا B أو بنتا G.

٣. أكتب عدد نواتج كل من التجارب العشوائية الآتية:

(أ) إلقاء عملة 4 مرات.

(ب) إلقاء زهرى طاولة مرتين ثم إلقاء عملة مرة واحدة.

٤. أكتب عناصر فضاء النواتج التالية:

(أ) $S = \{x : 5 < x < 50 , x/8 \in \mathbb{N}\}$ (ب) $S = \{x : x^2 - x - 6 = 0\}$

٥. إذا كان A ، B حدثين من فضاء النواتج S ، عرّف بكلمات واضحة الأحداث التالية:

(أ) $A \cap B$ (ب) $A \cup B$ (ج) $A - B$

(د) A' (هـ) $A' \cap B$ (و) $A' \cup B'$

٦. إذا كانت الأحداث A ، B ، C مُعرّفة على فضاء عينة لتجربة عشوائية، فعبّر

مستخدماً الرموز عن الأحداث التالية:

(أ) حدوث A مع عدم حدوث B. (ب) عدم حدوث أى حدث.

(ج) حدوث A ، B ، C معاً. (د) حدوث حدث واحد على الأقل.

(هـ) حدوث A ، B مع عدم حدوث C.

٧. في تجربة إلقاء حجرى نرد متميزين:

- (أ) اكتب فضاء النواتج.
 (ب) اكتب الحدث A : ظهور رقمين متساوين.
 (ج) اكتب الحدث B : ظهور رقمين مجموعهما أكبر من 7.
 (د) اكتب الحدث C : ظهور 4 على الحجر الثانى.
 (هـ) اكتب الأحداث $A \cap C$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$.

٨. إذا كان A ، B حدثين في فضاء نواتج S وكان:

$$P(A) = 0.2, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.5$$

فأوجد كلا من $P(A' \cap B')$ ، $P(A \cap B')$ ، $P(A' \cap B)$ ، $P(A \cap B)$.

٩. في تجربة إلقاء عملة مرتين كتب ستة طلاب الاحتمالات الآتية:

	فضاء النواتج			
	HH	HT	TH	TT
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	0	0	0	1
3	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
6	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

- (أ) أى من الإجابات يتفق مع مسلمات الاحتمال؟
 (ب) أى من الإجابات يكون صحيحا إذا علمنا أن العملة منتظمة؟
 (ج) أى من الإجابات يكون صحيحا إذا فرضنا أن الكتابة تظهر دائما؟
 (د) أى من الإجابات يكون صحيحا إذا فرضنا أن احتمال ظهور الكتابة ضعف

١٠. في فراغ النواتج $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ ليكن:

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_6), P(e_3) = 2P(e_4) = \frac{1}{2}P(e_1),$$

(أ) أوجد $P(e_1), P(e_2), P(e_3), P(e_4), P(e_5), P(e_6), P(e_7)$.

(ب) إذا كانت الأحداث A, B, C, D تُعرف كالتالي:

$$D = \{e_1, e_5, e_6\}, C = \{e_5, e_6, e_7\}, B = \{e_2, e_3, e_4\}, A = \{e_1, e_2\}$$

فأوجد $P(A), P(B), P(C), P(D), P(A \cup B), P(A \cap D), P(D \cap A)$

١١. إذا كان $P(B) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B') = \frac{1}{4}$ فاحسب كلا من $P(A)$,

$$P(A' \cap B'), P(A \cup B)$$

١٢. صندوق به 8 كرات سوداء، 6 كرات صفراء، 4 كرات حمراء. فإذا سحبت كرة

واحدة عشوائياً أوجد احتمال أن تكون الكرة:

(أ) سوداء (ب) صفراء (ج) حمراء (د) ليست صفراء

١٣. تم اختيار 10 وحدات عشوائياً من منتج معين. فإذا كانت A, B, C ترمز للأحداث

الآتية:

A : وحدة على الأقل تالفة، B : جميع الوحدات سليمة، C : 4 وحدات تالفة، ففسر

الأحداث:

(أ) $A \cup C$ (ب) $A \cap C$ (ج) $A \cap B$ (د) $A \cup B$

١٤. ألقى زهرا نرد منتظمين مرة واحدة. أوجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين أعلى

الزهرين:

(أ) أكبر من أو (ب) أقل من 7 (ج) فردى أكبر من 6

١٥. إذا علمت أن احتمال سقوط الثلج يساوي 0.2 واحتمال سقوط المطر يساوي 0.45

واحتمال أن يسقط ثلج أو مطر يساوي 0.6 فأوجد احتمالات الأحداث الآتية:

(أ) أن يسقط ثلج ومطر (ب) أن يسقط ثلج ولا يسقط مطر

(ج) ألا يسقط ثلج أو مطر

١٥. إذا كان $P(A) = 0.2$ ، $P(A \cup B) = 0.7$ فأوجد $P(B)$ في كل حالة من الحالات الآتية:

(أ) A ، B حدثان متنافيان (الحدث A مجموعة جزئية من

١٦. إذا كان $P(A) = 0.25$ ، $P(B) = 0.4$ فأوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) $P(A')$ (ب) $P(B')$ (ج) $P(A \cup B)$ إذا كانا A ، B متنافيين بالتبادل.

١٧. يدرس طالب مادتي الرياضيات والفيزياء. فإذا قدر الطالب لنفسه أن احتمال نجاحه في

الرياضيات يساوي 0.8 واحتمال نجاحه في الفيزياء يساوي 0.6 واحتمال نجاحه في

مادة منهما على الأقل يساوي 0.9 فما احتمال نجاح الطالب في كلتي المادتين؟

١٨. في دراسة للاحتمالات عدد أجهزة التليفزيون التي تفتنيها الأسر وجد الآتي:

عدد الأجهزة	0	1	2	3	4 أو أكثر
الاحتمال	0.05	0.24	0.33	0.20	0.18

أوجد احتمال أن تفتني الأسرة الآتي:

(أ) جهاز واحد على الأقل (ب) جهاز واحد على الأكثر

(ج) أقل من جهازين (د) جهازين على الأقل

الدرس الثالث

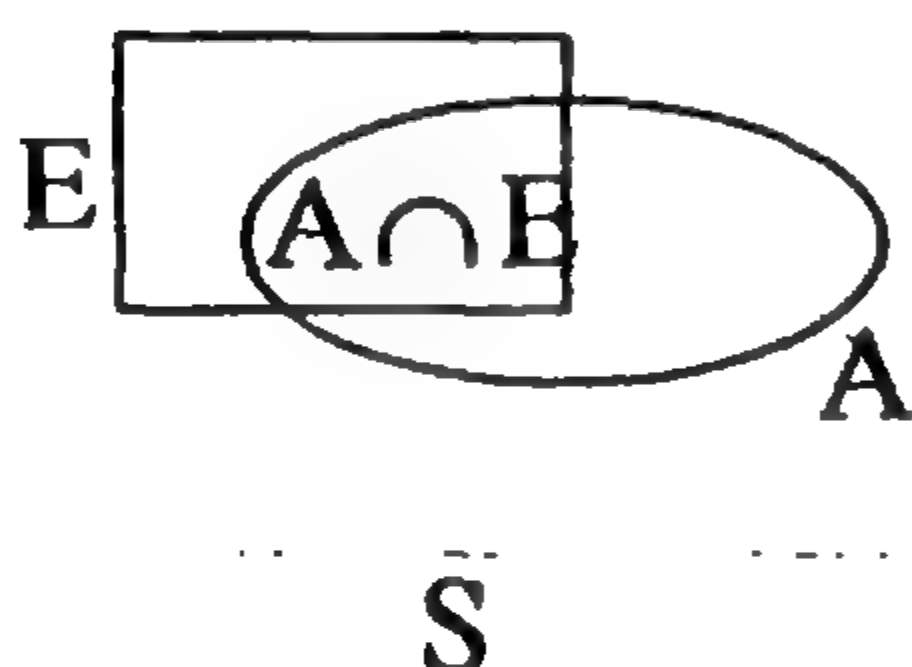
نظرية الاحتمالات (٢)

THEORY OF PROBABILITY (2)

١-٣ الاحتمال المشروط Conditional Probability

ليكن E حدثاً اختيارياً في فضاء نواتج S . احتمال وقوع أى حدث A بشرط حدوث E يرمز له بالرمز $P(A|E)$ ويُعرف كالاتى:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$



أى أن $P(A|E)$ يقيس الاحتمال النسبى لوقوع الحدث A بالنسبة للفضاء المختزل $E \subset S$. الشكل الآتى يوضح هذا المفهوم: ←

مثال (١)

ليكن S هو فضاء نواتج تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، وليكن E هو الحدث: مجموع الوجهين زوجي، وليكن A هو الحدث: أحد الوجهين يساوى 5. أوجد احتمال A بشرط E .

الحل $S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6),$

$(2,1), (2,2), \dots, (2,6),$

\dots

$(6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$

$E = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5),$

$(4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

$P(E) = 1/2$

$A = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)\}$

$A \cap E = \{(1,5), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$ $P(A \cap E) = 5/36$

$$\therefore P(A | E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{5}{36} \div \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

الشكل الآتى يوضح المسألة:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

مثال (٢)

فى تجربة رمى حجرى نرد متمايزين أوجد احتمال:

- (أ) أن يكون مجموع الوجهين يساوى 7.
 (ب) أن يكون مجموع الوجهين يساوى 7 إذا علمت أن أحد الوجهين أو كلاهما يساوى 3 فأكثر.

الحل

(أ) ليكن A: مجموع الوجهين 7.

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ب) ليكن B: أحد الوجهين أو كلاهما يساوى 3 فأكثر.

$$B = \{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$\therefore P(B) = \frac{16}{36}$$

$$A \cap B = \{(3,4), (4,3)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{16/36} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

من الشكل نستنتج أن:

$$P(A | B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

مثال (۳)

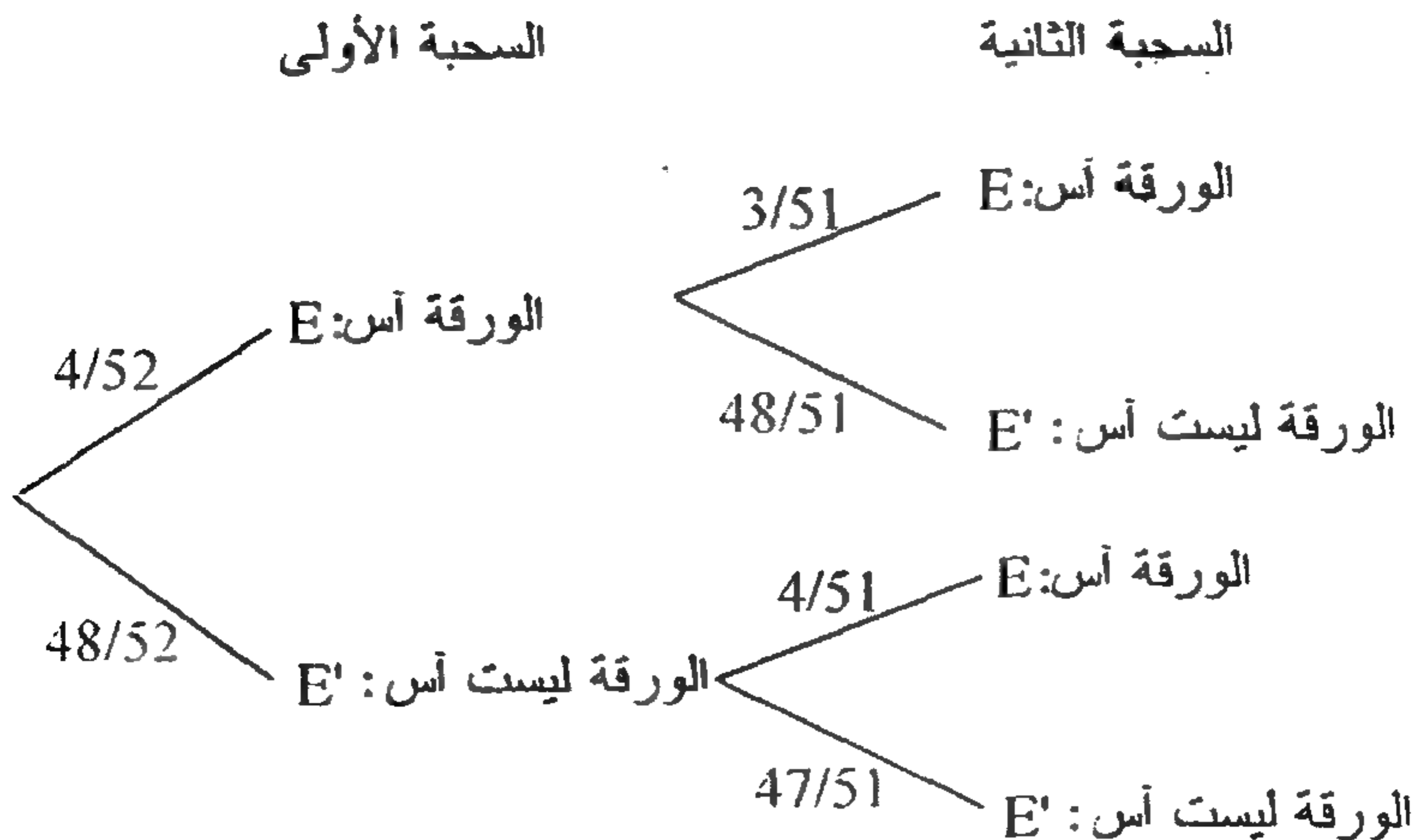
في تجربة سحب ورقتين من أوراق لعب (كوتشينة) مكونة من 52 ورقة، ما هو احتمال:

(أ) أن تكون الورقة الثانية أس بشرط أن تكون الورقة الأولى أس؟

(ب) أن تكون الورقة الثانية أس بشرط أن تكون الورقة الأولى ليست أس؟

الحل

ليكن E : الورقة أس وليكن E' : الورقة ليست أس. نرسم شجرة الاحتمالات الآتية:



واضح من الشكل أن:

(أ) احتمال أن تكون الورقة الثانية أس بشرط أن تكون الورقة الأولى أس = $3/51$

(ب) احتمال أن تكون الورقة الثانية أس بشرط أن تكون الورقة الأولى ليست أس

یساوی 4/51 .

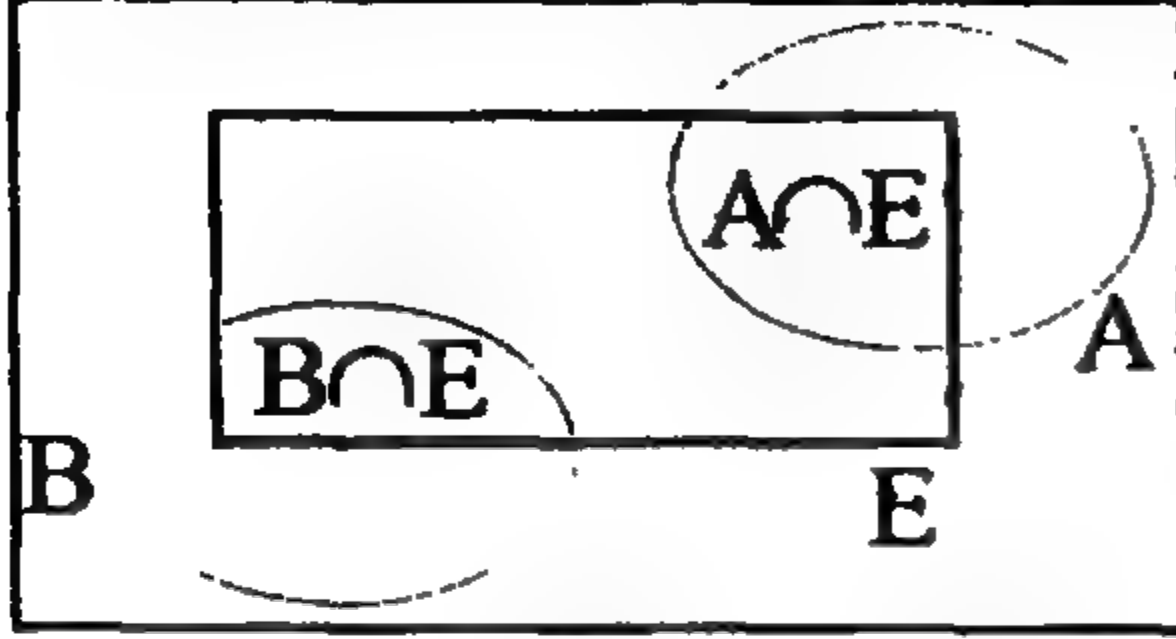
٢-٣ نظريات الاحتمال المشروط نظرية (١)

إذا كان A ، B حدثين متنافيين فإن:

$$P(A \cup B | E) = P(A | E) + P(B | E)$$

ويسمى ذلك قانون الجمع.

البرهان



إذا كان A ، B متنافيين فإن كلا من $A \cap E$ ، $B \cap E$ يكونان أيضا متنافيين. ←

$$\begin{aligned} P(A \cup B | E) &= \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)} = \frac{P[(A \cap E) \cup (B \cap E)]}{P(E)} \\ &= \frac{P(A \cap E) + P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} + \frac{P(B \cap E)}{P(E)} \\ &= P(A | E) + P(B | E) \end{aligned}$$

ويمكن تعميم قانون الجمع لعدة أحداث كما يلي:

إذا كانت A_1 ، A_2 ، ... ، A_n أحداثا متنافية فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i | E\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i | E)$$

نظرية (٢)

لأي حدثين A ، B فإن:

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A) = P(B \cap A)$$

ويسمى ذلك قانون الضرب.

البرهان

$$\therefore P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

مثال (١)

في تجربة سحب ورقتين من أوراق لعب (كوتشينة) مكونة من 52 ورقة ما هو احتمال أن تكون الورقتان الأوليان في السحب آسين؟
الحل

ليكن E هو الحدث : الورقة آس.

$$P(E) = \frac{4}{52} , P(E | E) = \frac{3}{51}$$

$$\therefore P(E \cap E) = P(E | E)P(E) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

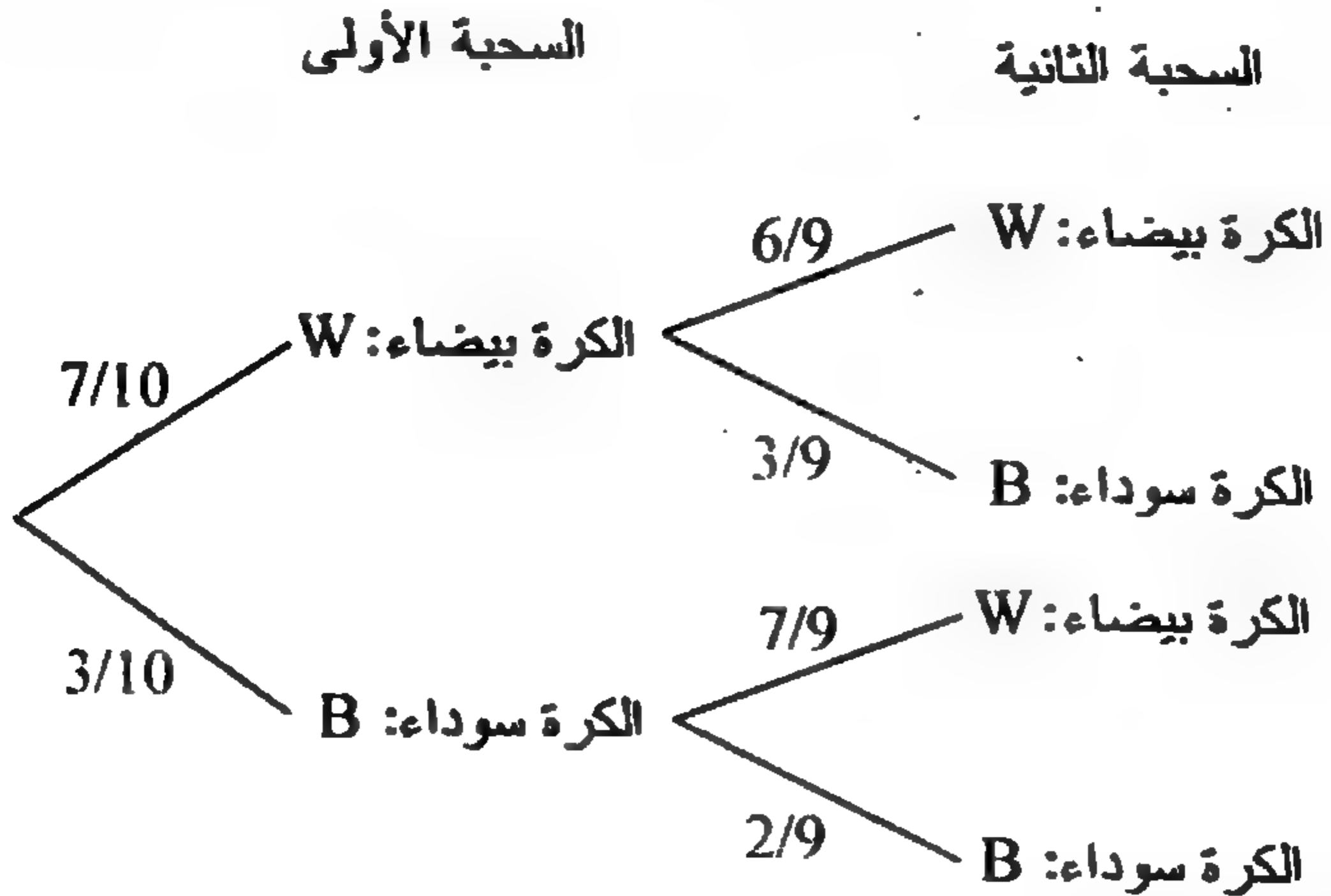
مثال (٢)

يوجد في كيس 7 كرات بيضاء ، 3 كرات سوداء، سحب كرتان عشوائيا دون إحلال. احسب الاحتمالات الآتية:

- (أ) أن تكون الكرتان سوداوان (ب) أن تكون الكرتان بيضاوان.
(ج) أن تكون إحدى الكرتين بيضاء والأخرى سوداء.

الحل

ليكن W: الكرة بيضاء وليكن B: الكرة سوداء. نرسم شجرة الاحتمالات الآتية:



واضح من الشكل أن:

$$P(BB) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} , P(WW) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

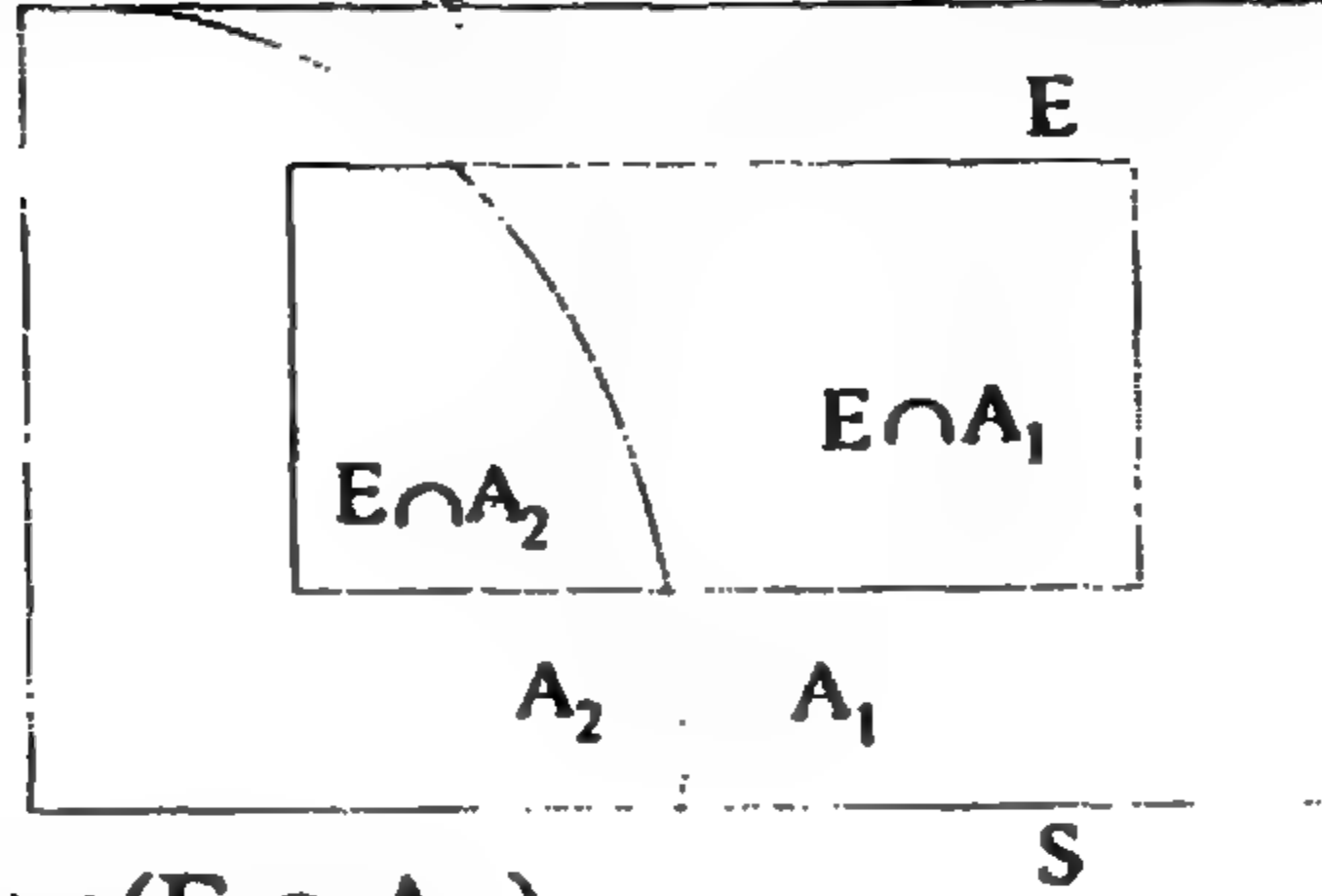
$$P(BW) + P(WB) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{15}$$

نظرية (٣)

إذا كان الحدث E يمكن أن يقع فقط مع أحد الحدثين المتنافيين والشاملين A_1, A_2 فإن:

$$P(E) = P(E | A_1)P(A_1) + P(E | A_2)P(A_2)$$

البرهان



من الشكل:

$$E = (E \cap A_1) \cup (E \cap A_2)$$

وحيث أن A_1, A_2 متنافيين إذن $E \cap A_1, E \cap A_2$ متنافيين.

$$\begin{aligned} \therefore P(E) &= P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) \\ &= P(E | A_1)P(A_1) + P(E | A_2)P(A_2) \end{aligned}$$

ملاحظة

يمكن تعميم النظرية لعدة أحداث المتنافية وشاملة A_1, A_2, \dots, A_n كالآتي:

إذا كان الحدث E يمكن أن يقع فقط مع أحد الأحداث المتنافية والشاملة A_1, A_2, \dots, A_n فإن:

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E | A_i)P(A_i)$$

البرهان

$$\therefore E = \bigcup_{i=1}^n (E \cap A_i)$$

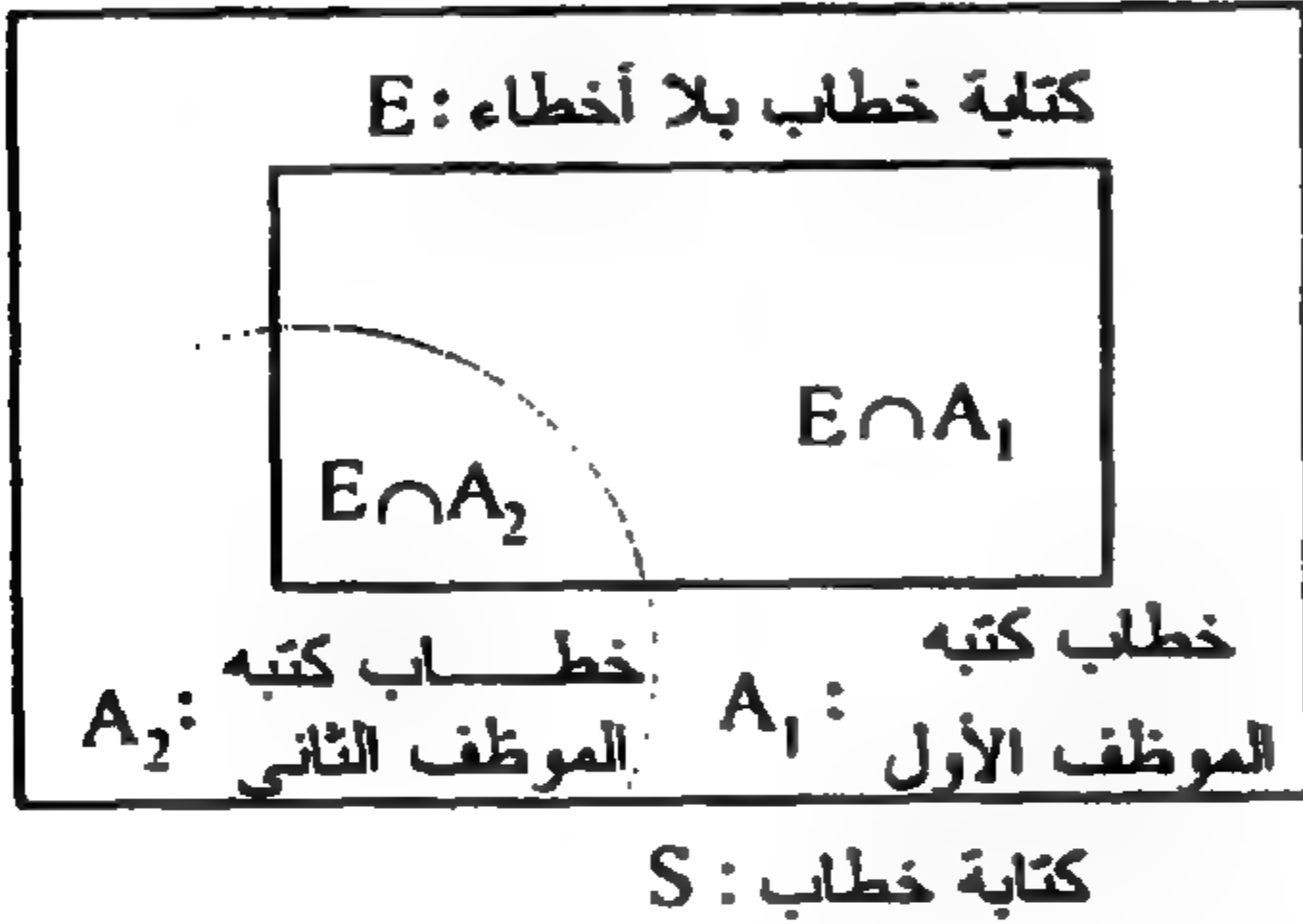
$$\begin{aligned} \therefore P(E) &= \sum_{i=1}^n P(E \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(E | A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

مثال (١)

موظفان في سكرتارية مكتب يقومان بنسخ الخطابات على الآلة الكاتبة. فإذا كان الموظف الأول ينسخ 80 % من خطابات المكتب منها 90 % بلا أخطاء والموظف الثاني ينسخ 20 % من خطابات المكتب منها 50 % بلا أخطاء، فاحسب احتمال نسخ خطاب بلا أخطاء.

الحل

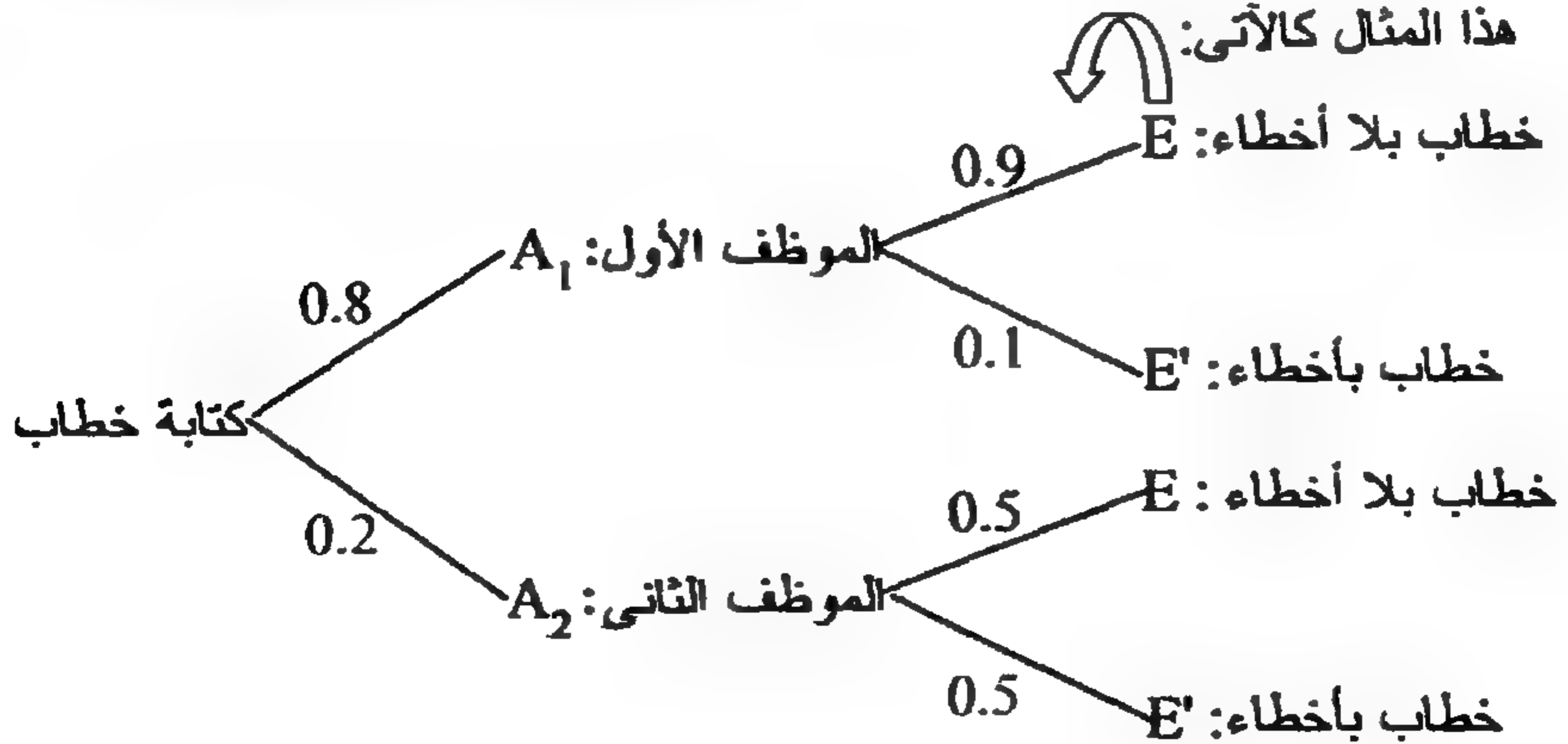
نفرض أن E يرمز للحدث "خطاب بلا أخطاء" وأن A_1 يرمز للحدث "الخطاب نسخة الموظف الأول" وأن A_2 يرمز للحدث "الخطاب نسخة الموظف الثاني".
إن A_1 ، A_2 حدثان متنافيان وشاملان أي $\{A_1, A_2\}$ تجزئ لفضاء العينة S "كتابة خطاب".



$$\begin{aligned}P(A_1) &= 0.8, \quad P(A_2) = 0.2 \\P(E | A_1) &= 0.9, \quad P(E | A_2) = 0.5 \\P(E) &= P(E | A_1)P(A_1) \\&\quad + P(E | A_2)P(A_2) \\&= 0.9 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 \\&= 0.72 + 0.10 = 0.82\end{aligned}$$

هذا؛ ونستطيع استخدام ما يسمى بـ شجرة الاحتمالات *Probability tree* لحل

هذا المثال كالآتي:



من الشكل نجد أن:

$$\begin{aligned}P(E) &= P(E | A_1)P(A_1) + P(E | A_2)P(A_2) \\&= 0.9 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.72 + 0.10 = 0.82\end{aligned}$$

مثال (٢)

صندوق يحتوى على 4 كرات حمراء ، 3 خضراء ، كرة واحدة زرقاء. سحب كرتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال. أوجد احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى خضراء.

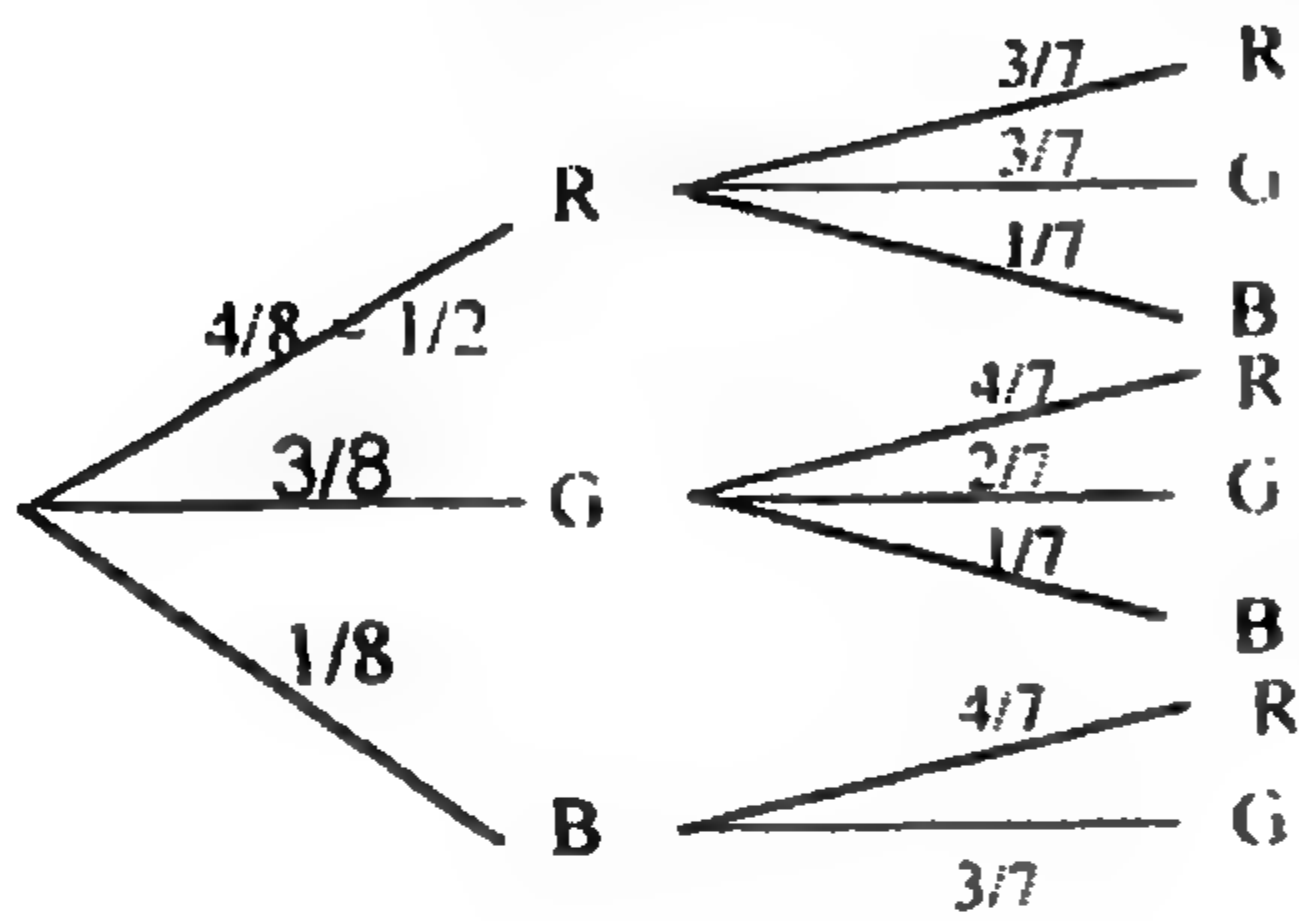
الحل

نُعرف الأحداث الآتية:

R: سحب كرة حمراء ، G: سحب كرة خضراء ، B: سحب كرة زرقاء.

السحب الأولى

السحب الثانية



احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى خضراء يساوى احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية خضراء + احتمال أن تكون الكرة الأولى خضراء والكرة الثانية حمراء. أى:

$$P(R|G)P(G) + P(G|R)P(R) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$$

نظرية بييز Baye's Theorem

إذا كان الحدث E يمكن أن يقع فقط مع أحد الأحداث المتنافية والشاملة A_1, A_2, \dots, A_n فإن:

$$P(A_i | E) = \frac{P(E | A_i)P(A_i)}{P(E)}$$

البرهان

$$P(E | A_i)P(A_i) = P(E \cap A_i) = P(A_i | E)P(E)$$

$$\therefore P(A_i | E) = \frac{P(E | A_i)P(A_i)}{P(E)}$$

مثال (١)

في مثال (١) السابق تم نسخ خطاب ووجد أنه بلا أخطاء ولكننا لا نعرف من هو الموظف الذى نسخ الخطاب. ما هو احتمال أن يكون الموظف الثانى هو الذى نسخه؟

الحل

$$P(A_2 | E) = \frac{P(E | A_2)P(A_2)}{P(E)} = \frac{0.5 \times 0.2}{0.82} \approx 0.112$$

مثال (٢)

مؤسسة للصناعات الغذائية تنتج معلبات من خلال ثلاثة مصانع كما يلي:
المصنع الأول ينتج 30% من إنتاج المؤسسة منها 10% تالف.
المصنع الثاني ينتج 20% من إنتاج المؤسسة منها 5% تالف.
المصنع الثالث ينتج 50% من إنتاج المؤسسة منها 4% تالف.
اشترى شخص ما علبة من إنتاج المؤسسة. أوجد:
(أ) احتمال أن تكون العلبة تالفة.
(ب) احتمال أن تكون العلبة من إنتاج المصنع الثاني إذا علم أنها تالفة.

العلبة من إنتاج المصنع الأول A_1	العلبة من إنتاج المصنع الثالث A_3
$E \cap A_1$	$E \cap A_3$
$E \cap A_2$	
العلبة من إنتاج المصنع الثاني A_2	العلبة تالفة E

الحل

نفرض الأحداث الآتية:

A_1 : العلبة من إنتاج المصنع الأول ،
 A_2 : العلبة من إنتاج المصنع الثاني ،
 A_3 : العلبة من إنتاج المصنع الثالث ،
 E : العلبة تالفة .

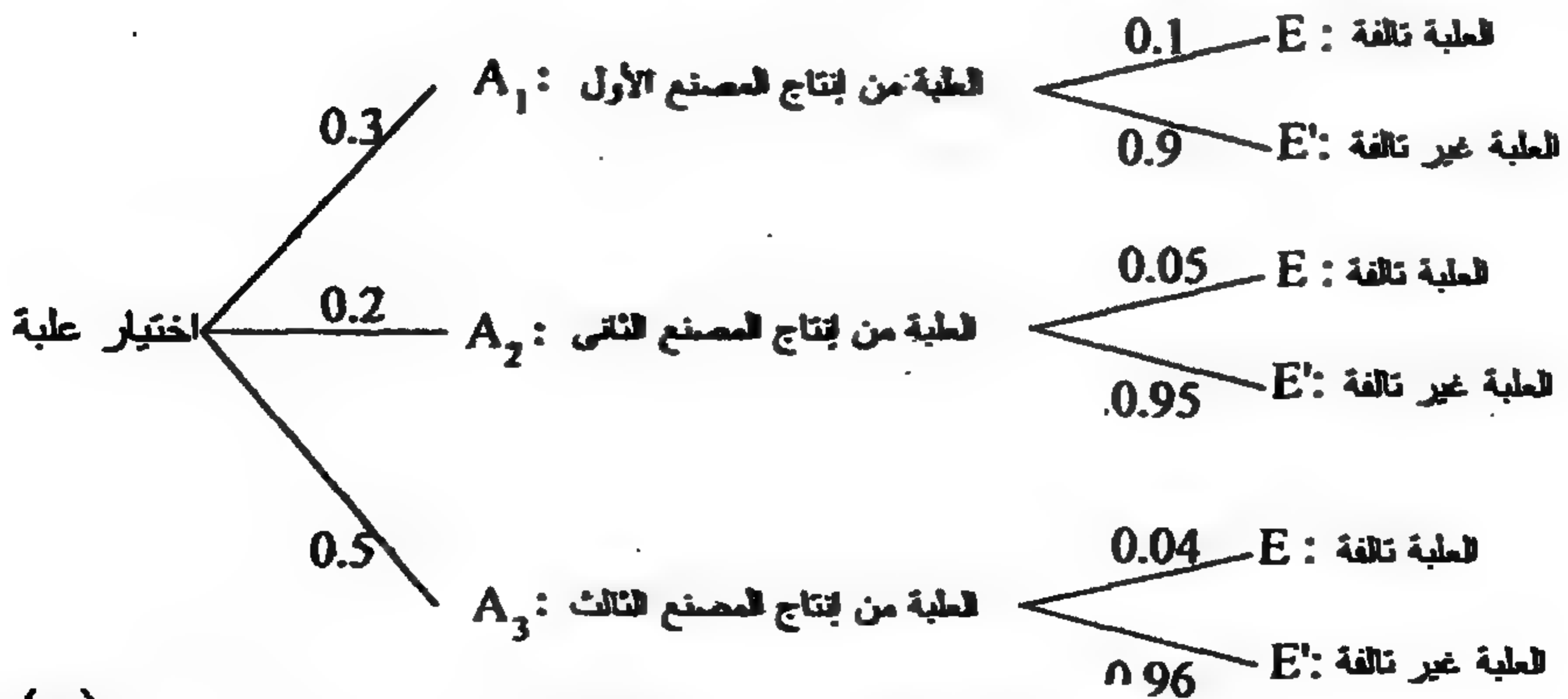
$$P(A_1) = 0.3, P(A_2) = 0.2, P(A_3) = 0.5$$

$$P(E|A_1) = 0.1, P(E|A_2) = 0.05, P(E|A_3) = 0.04$$

$$P(E) = 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.05 + 0.5 \times 0.04 = 0.06$$

$$P(A_2|E) = \frac{0.02 \times 0.05}{0.06} = 0.1667$$

هذا؛ ونستطيع استخدام شجرة الاحتمالات لحل هذا المثال كالآتي:



$$P(E) = 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.05 + 0.5 \times 0.04 = 0.06$$

$$P(A_2|E) = \frac{0.2 \times 0.05}{0.06} = 0.1667$$

٣-٣ الأحداث المستقلة

يقال أن الحدثين A ، B مستقلين إذا كان احتمال حدوث أى منهما لا يتوقف على حدوث الآخر أى إذا كان:

$$P(A|B) = P(A) , P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

أى إذا كان:

وتكون الأحداث A_1, A_2, \dots, A_n مستقلة إذا كانت مستقلة متتلى متتلى.

وبديهى أن الأحداث الأولية هى أحداث غير مستقلة حيث أنها متنافية.

مثال (١)

فى تجربة إلقاء عملة ثلاث مرات، ليكن A هو الحدث " أول رمية صورة "،
وليكن B هو الحدث " ثانى رمية صورة "، وليكن C هو الحدث "
صورتان متتاليتان ". ابحث استقلال الأحداث A ، B ، C .
الحل

فضاء العينة هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\} \therefore P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{HHH, HHT, THH, THT\} \therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

$$C = \{HHT, THH\} \therefore P(C) = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \{HHH, HHT\} \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

إن الحدثان A ، B مستقلان.

$$A \cap C = \{HHT\} \therefore P(A \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(C)$$

إن الحدثان A ، C مستقلان.

من ناحية أخرى:

$$B \cap C = \{HHT, THH\} \therefore P(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(B)P(C)$$

إن الحدثان B ، C غير مستقلين.

إن الأحداث A ، B ، C غير مستقلة.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، ليكن A هو الحدث "الرقم أقل من 5"، وليكن B هو الحدث "الرقم أكبر من 2". هل الحدثان A ، B مستقلان؟

الحل

فضاء العينة هو:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \therefore P(A) = \frac{2}{3}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \therefore P(B) = \frac{2}{3}$$

$$A \cap B = \{3, 4\} \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq P(A)P(B)$$

إذن A ، B حدثان غير مستقلين.

مثال (٣)

يصوب جنديان على هدف ما. فإذا كان احتمال إصابة الجندي الأول للهدف يساوي 0.25 ، احتمال إصابة الجندي الثاني للهدف يساوي 0.4، فما هو احتمال إصابة الهدف من كليهما؟ وما احتمال إصابة الهدف من أحدهما أو كليهما؟

الحل

نفرض أن A هو الحدث : إصابة الجندي الأول للهدف ، B هو الحدث: إصابة الجندي الثاني للهدف.

حيث أن A ، B مستقلين، إذن:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.25 \times 0.4 = 0.1$$

إذن احتمال إصابة الهدف من كليهما = 0.1.

$$P(A \cup B) = 0.25 + 0.40 - 0.10 = 0.55$$

إذن احتمال إصابة الهدف من أحدهما أو كليهما = 0.55.

مثال (٤)

في تجربة إلقاء عملة مرتين ليكن A : صورة في الرمية الأولى ، B : صورة في الرمية الثانية ، C : صورة واحدة بالضبط. أي أن:

$$A = \{HH, HT\} , B = \{HH, TH\} , C = \{HT, TH\}$$

$$A \cap B = \{HH\} , A \cap C = \{HT\} , B \cap C = \{TH\}$$

واضح أن الأحداث A ، B ، C مستقلة.

مثال (٥)

طائرة تعمل بمحركين مستقلين. فإذا كان احتمال أن يتعطل المحرك الأول يساوي 0.02 واحتمال أن يتعطل المحرك الثاني يساوي 0.015 فما احتمال أن تسير الطائرة بمحرك منهما على الأقل؟

الحل

نفرض أن A هو الحدث: المحرك الأول يعمل ، B هو الحدث: المحرك الثاني يعمل.

$$\therefore P(A) = 1 - 0.02 = 0.98 , P(B) = 1 - 0.015 = 0.985$$

وحيث أن A ، B مستقلين، إذن:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.98 \times 0.985 = 0.9653$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.98 + 0.985 - 0.9653 = 0.9997$$

إذن احتمال أن تسير الطائرة بمحرك منهما على الأقل يساوي 0.9997.

تمرين ٣

١. في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معا، أحسب احتمال :

(أ) المجموع زوجي بشرط الحجر الأول 6

(ب) الحجر الثاني 6 بشرط المجموع زوجي

(ج) المجموع زوجي بشرط المجموع أقل من 5

(د) المجموع فردي بشرط الحجر الأول فردي

(هـ) الحجر الثاني 6 بشرط الحجر الأول 4

٢. في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات، أحسب احتمال الحدث:

على الأقل صورتين بشرط الرمية الأولى صورة.

كيس يحتوى على 3 كرات بيضاء، كرتين سوداوين، 5 كرات حمراء. سحب كرتان من الكيس دون إحلال. أحسب احتمال كل من النواتج الممكنة.

لأى حدث A احسب $P(A|A)$ ، $P(A'|A)$ ، $P(S|A)$ ، $P(A|A')$.

وجه صيادان نيرانهما إلى ثعلب. فإذا كانت فرصة كل منهما في إصابة الثعلب هي $1/3$ فاحسب احتمال إصابة الثعلب بفرض الاستقلال.

في فضاء الاحتمال (S,P) حيث $A,B \in S$ وجد أن :

$$P(A) = 0.5 ، P(B) = 0.6 ، P(A \cup B) = 0.8$$

هل A ، B مستقلان؟

١. إذا كان احتمال أن ينجح شخص في الامتحان يساوى $1/4$ فما هو احتمال نجاحه بعد أربع محاولات مستقلة؟

٨. طائرة ذات محركين يعملان بشكل مستقل. فإذا كان احتمال أن يعمل كل محرك أكثر من ألف ساعة دون إصلاح هو x ، أحسب احتمال أن يعمل محرك على الأقل أكثر من ألف ساعة كدالة في x ووضح هذه الدالة بيانياً.

٩. مخرطتان A ، B تنتجان مسامير تبعاً أوتوماتيكياً في صناديق. تنتج المخرطة A 1000 صندوق في اليوم منها 7 % معيب وتنتج المخرطة B 3000 صندوق يومياً منها 4 % معيب. أختير أحد الصناديق عشوائياً من الإنتاج اليومي واختير منه مسماراً واحداً. ما هو احتمال أن يكون المسمار معيباً؟

وإذا افترض أن المسمار المختار قد وجد معيباً بالفعل فما هو احتمال أن يكون من إنتاج A ؟

١٠. فريق كرة قدم 60 % من مبارياته داخل البلاد والباقي في الخارج، فإذا كان احتمال فوزه في الداخل 0.7 واحتمال فوزه في الخارج 0.4 فاحسب:

(أ) احتمال فوز الفريق في مباراة اختيرت عشوائيا.

(ب) احتمال أن تكون المباراة داخلية إذا علم أنها انتهت بالهزيمة.

١١. إذا كان A ، B حدثين في فضاء نواتج S وكان $P(A) = 0.2$ ، $P(B) = 0.4$ ، $P(A \cup B) = 0.5$. فأوجد كلا من:

(أ) $P(A \cap B)$ (ب) $P(A' \cap B)$

(ج) $P(A \cap B')$ (د) $P(A' \cap B')$

هل A ، B مستقلان؟ لماذا؟

١٢. إذا كان $P(A) = 0.35$ ، $P(B) = 0.72$ ، $P(A \cup B) = 0.8$:

(أ) أوجد كلا من $P(A' \cap B')$ ، $P(A \cap B)$ ، $P(A')$ ، $P(B')$.

(ب) هل A ، B حدثان مستقلان؟ لماذا؟

(ج) الحدث A مجموعة جزئية من الحادث B .

١٣. إذا كان $P(A) = 0.25$ ، $P(B) = 0.4$ فأوجد الاحتمالات الآتية:

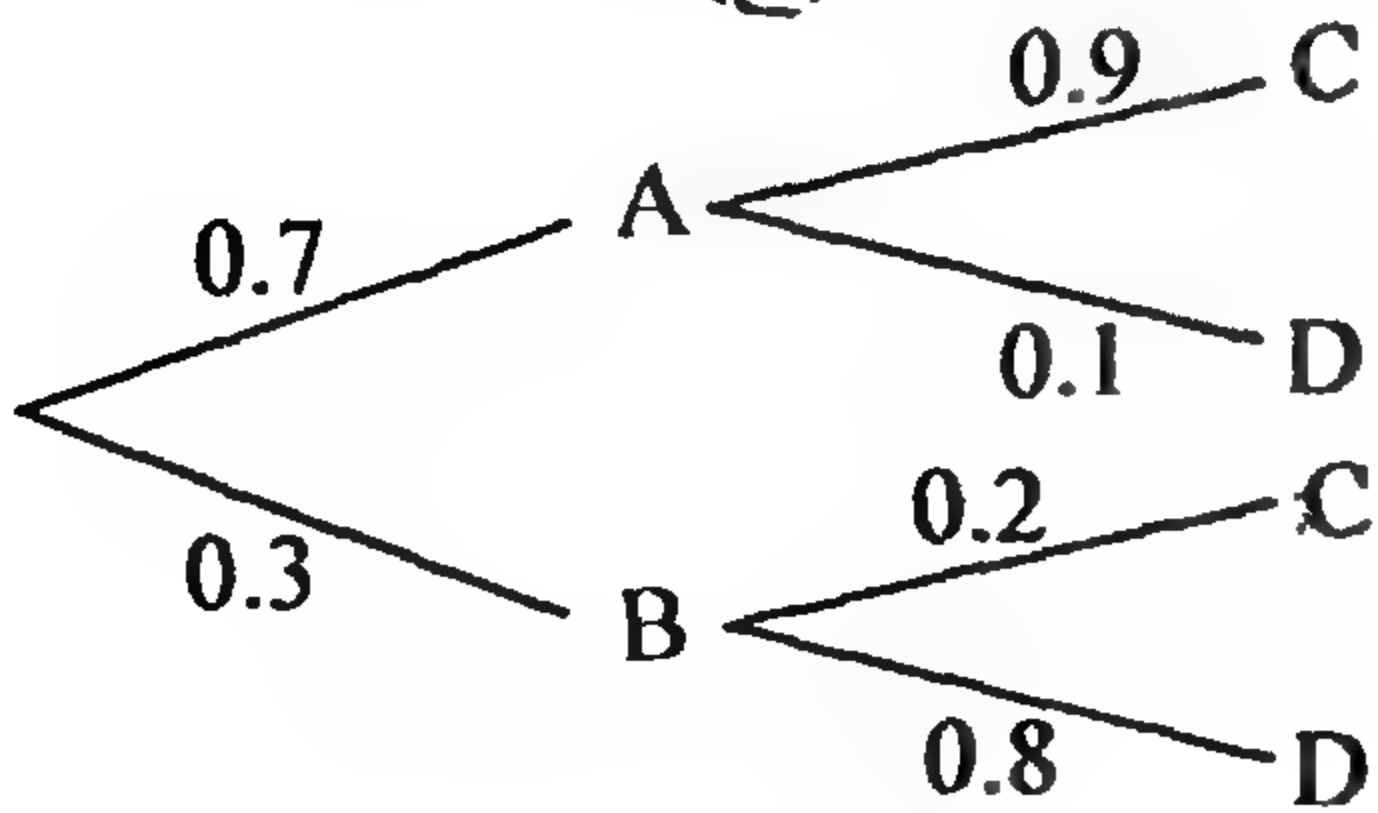
(أ) $P(A')$ (ب) $P(B')$ (ج) $P(A \cup B)$ إذا كان A ، B متافيين

(د) $P(A \cup B)$ إذا كان A ، B مستقلين.

١٤. إذا كان $P(A) = 0.2$ ، $P(A \cup B) = 0.7$ فأوجد $P(B)$ في حالة:

(أ) A ، B مستقلان (ب) A ، B متافيان (ج) $A \subset B$

١٥. من شجرة الاحتمالات الآتية أوجد:



(أ) $P(D)$ ، $P(C)$

(ب) $P(D|A)$ ، $P(C|A)$

(ج) $P(C|B)$

(د) $P(D|B)$

١٠. في مدينة صغيرة وجد أن 20% من الأسر ليس لديهم أطفال ، 30% لديهم طفل واحد ، 20% لديهم طفلان ، 16% لديهم ثلاثة أطفال ، 8% لديهم أربعة أطفال ، 6% لديهم خمسة أطفال على الأقل. أوجد احتمال أن يكون لدى أسرة طفلان إذا علم أن أن لديها طفل واحد على الأقل.

١٧. من جدول الاحتمالات الآتية:

المجموع	G	F	E	
0.24	0.08	0.06	0.10	H
0.72	0.32	0.14	0.30	I
1.00	0.40	0.20	0.40	المجموع

أوجد كلا من:

$P(H)$	(ج)	$P(G)$	(ب)	$P(E)$	(أ)
$P(E \cap H)$	(و)	$P(E \cap I)$	(هـ)	$P(I)$	(د)
		$P(G \cap I)$	(ح)	$P(G \cap H)$	(ز)

١٨. في فراغ العينة:

$$S = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

لتكن:

$$A = \{\spadesuit, \clubsuit\} , B = \{\spadesuit, \heartsuit\} , C = \{\spadesuit, \diamondsuit\}$$

هل هذه الأحداث مستقلة؟

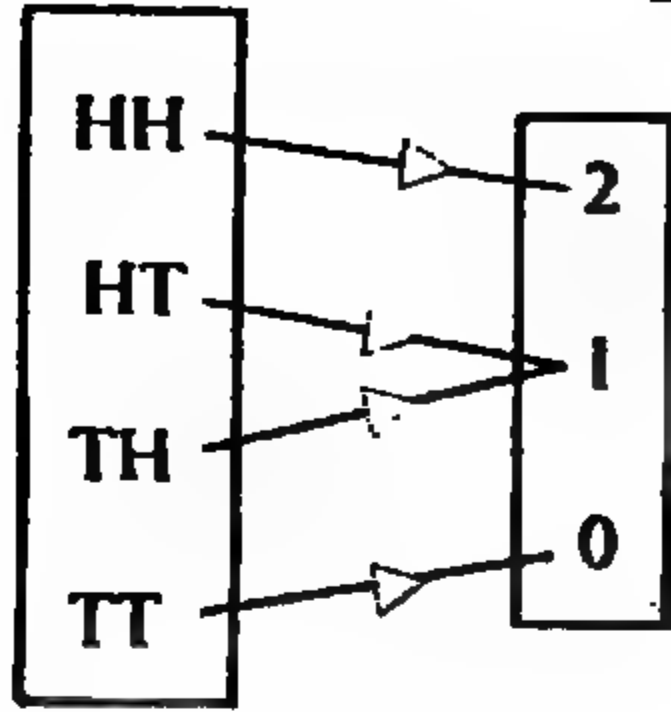
١٩. يمكن إصابة طائرة معادية بنوعين من الصواريخ بالاحتمالات الآتية: احتمال إصابة الطائرة بالصاروخ A يساوي 0.95 ، احتمال إصابة الطائرة بالصاروخ B يساوي 0.90 . فإذا أطلق الصاروخان فما هو احتمال إصابة الطائرة بأحد الصاروخين على الأقل؟

٢٠. منتج يعتمد في تكوينه على ثلاثة عناصر مستقلة، ويعتبر المنتج معييا إذا كان واحداً أكثر من هذه العناصر معييا. فإذا كان احتمال أن تكون هذه العناصر معيية يساوي 0.01 ، 0.02 ، 0.10 على التوالي فأوجد احتمال أن يكون المنتج معييا. وإذا وجد أن المنتج معييا فما احتمال أن يكون السبب هو العنصر الثالث؟
-

الدرس الرابع المتغير العشوائي المتقطع

DISCRETE RANDOM VARIABLES

المتغيرات العشوائية Random Variables

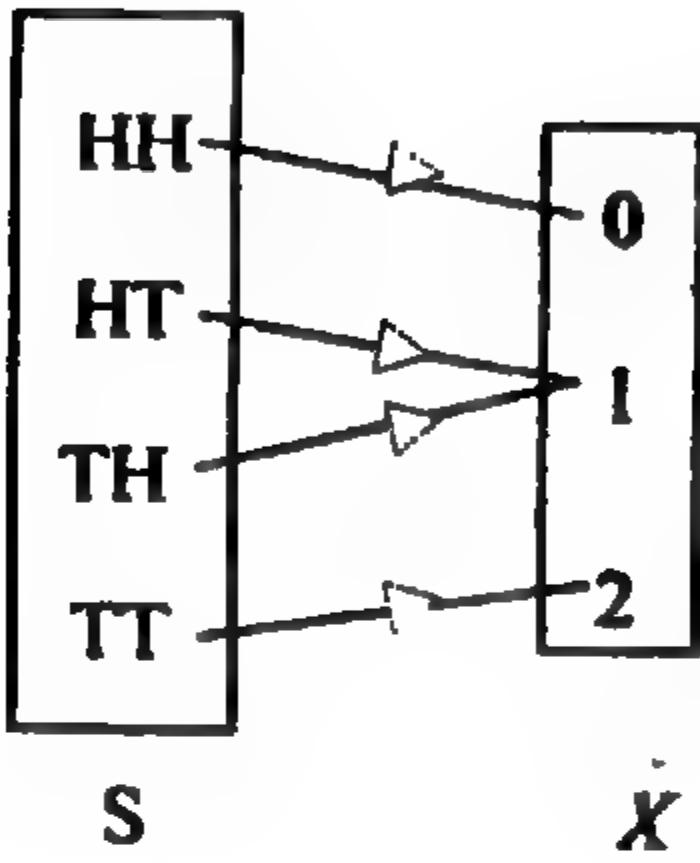


في معظم الأحيان لا نهتم بنتائج التجربة العشوائية ذاتها، ولكن يكون اهتمامنا منصبا على أعداد حقيقية مرتبطة بهذه النتائج.

مثال (١)

لنأخذ تجربة إلقاء قطعة معدنية مرتين حيث فضاء النتائج هو:

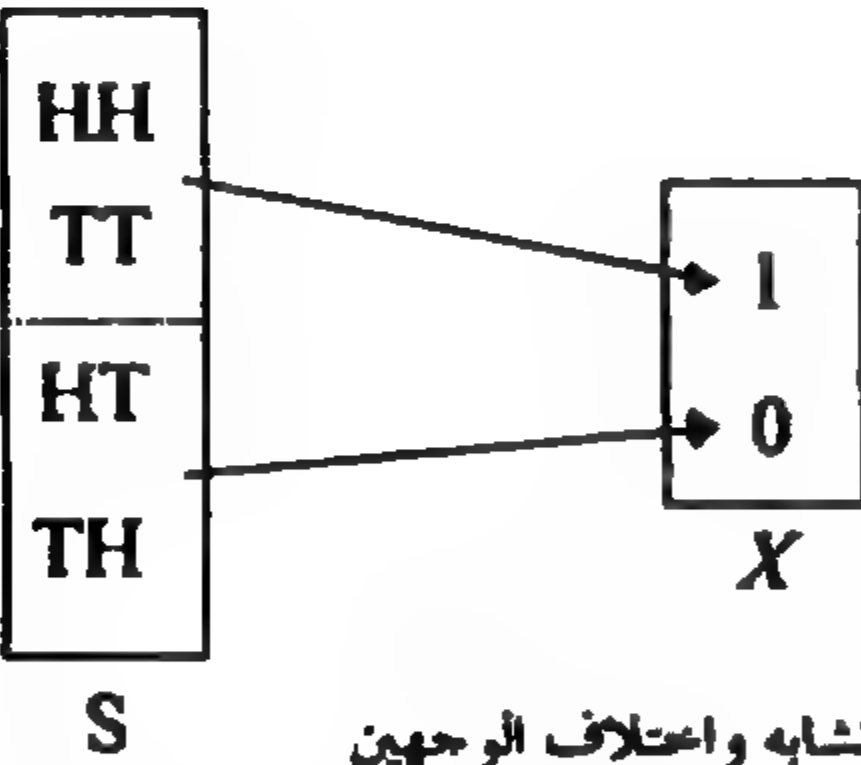
$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$



وليكن اهتمامنا منصبا على معرفة عدد الصور التي تظهر على وجه العملة. فإننا نحصل على متغير X موضحا بالشكل الآتي:

مثال (٢)

لنأخذ نفس تجربة إلقاء قطعة معدنية مرتين وليكن اهتمامنا منصبا على معرفة عدد مرات الكتابة التي تظهر على وجه العملة. فإننا نحصل على متغير X موضحا بالشكل الآتي:



مثال (٣)

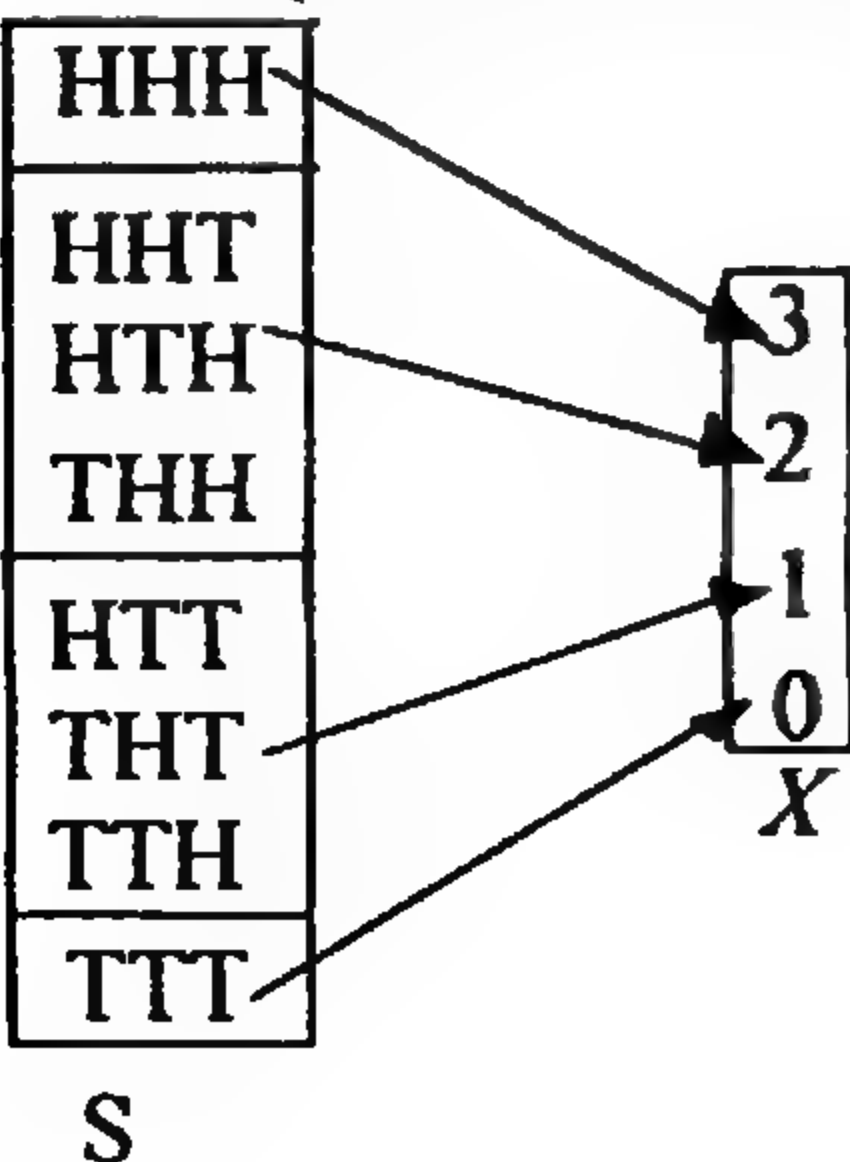
لنأخذ نفس تجربة إلقاء قطعة معدنية مرتين وليكن اهتمامنا منصبا على تشابه واختلاف وجهي العملة. فإننا نحصل على متغير عشوائي X موضحا بالشكل الآتي:

مثال (٤)

المتغير X يمثل تشابه واختلاف الوجهين
(العدد ١ يدل على التشابه)
فضاء الأحداث

في تجربة إلقاء عملة ثلاث مرات حيث فضاء النتائج:

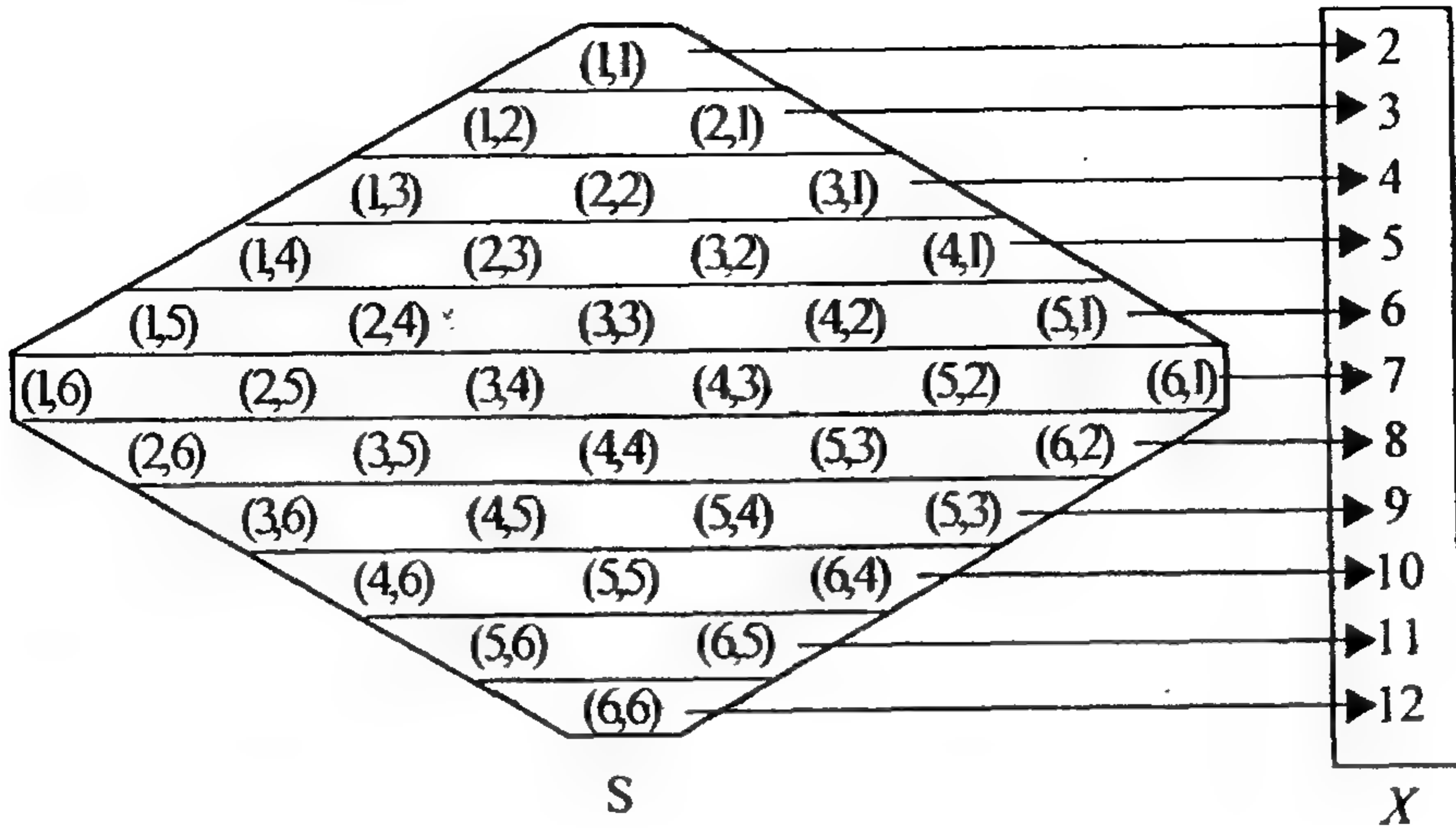
$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$



ليكن المتغير العشوائي X هو عدد الصور. فإننا نحصل على متغير عشوائي X موضحا بالشكل الآتي:

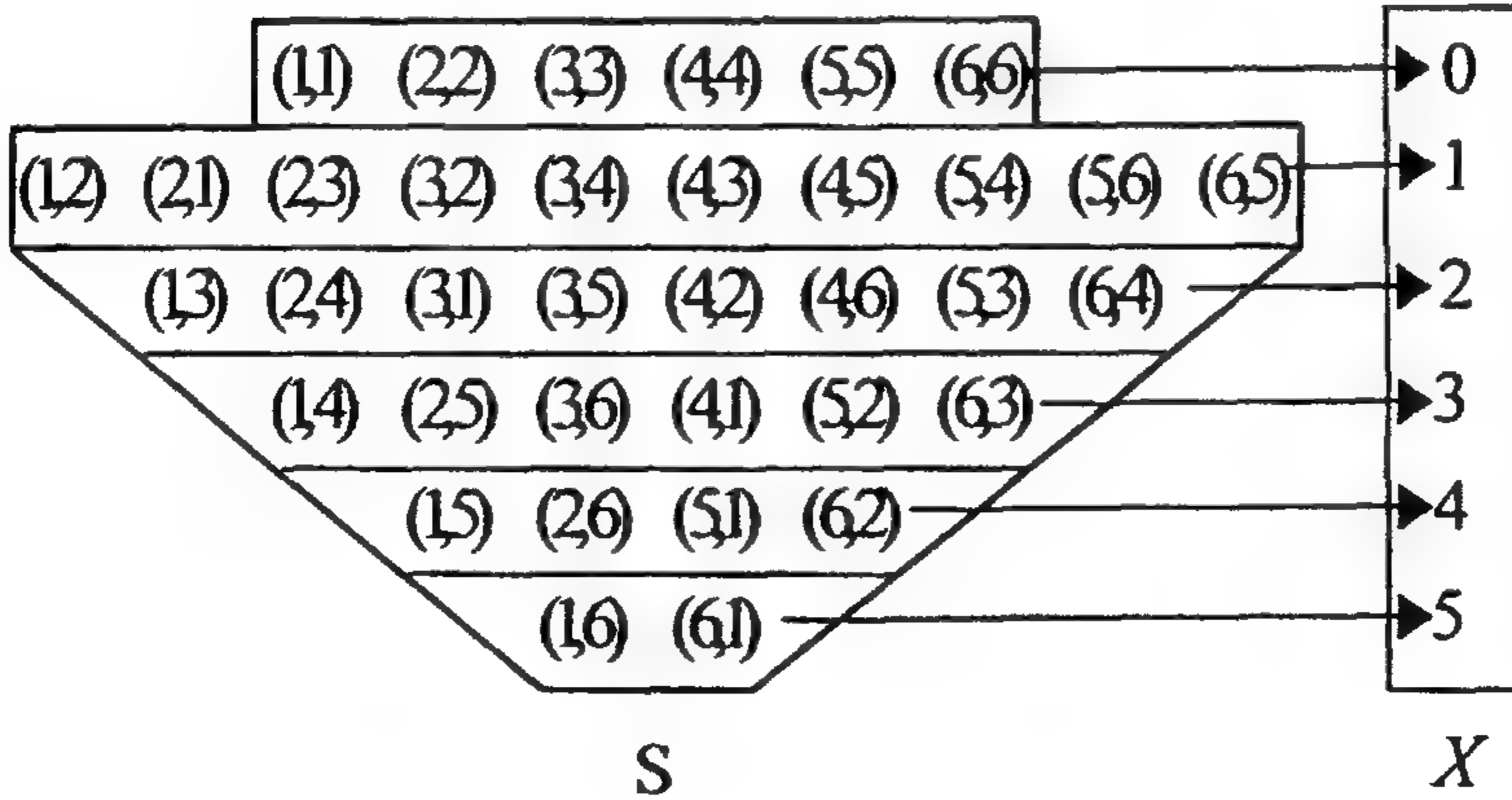
مثال (٥)

في تجربة إلقاء زهر الطاولة مرتين ليكن المتغير العشوائي X يدل على مجموع الوجهين. يبين الشكل الأحداث وقيم المتغير العشوائي المناظرة:



مثال (٦)

في نفس تجربة إلقاء زهر الطاولة مرتين ليكن المتغير العشوائي X يدل على القيمة المطلقة للفرق بين الوجهين. يبين الشكل الآتي الأحداث وقيم المتغير العشوائي المناظرة:



وبوجه عام:

إذا كان S فضاء نواتج تجربة عشوائية فإن أي دالة $f: S \rightarrow R$ تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على S إذا كان معكوس أي قيمة من قيم الدالة f حدث من أحداث S .

٢ المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة

Discrete and Continuous Random Variables

يقال لمتغير عشوائي أنه متقطع (متفصل - وثاب) *discrete* إذا كان مداه مجموعة محدودة أو قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ويقال لمتغير عشوائي أنه متصل *continuous* إذا كان مداه فترة (مغلقة أو مفتوحة) أى مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

وفي كل الأمثلة السابقة كان المتغير العشوائي متقطعا والمثالين الآتيين يعطيان متغيرا عشوائيا متصلا:

مثال (١)

في تجربة اختيار نقطة داخل الفترة $[a, b] \subset \mathbb{R}$ وكان المتغير العشوائي يعبر عن بعد النقطة $x \in [a, b]$ عن نقطة الأصل فإن مدى هذا المتغير العشوائي هو الفترة $[|a|, |b|]$ أو $[|b|, |a|]$. لذلك فهو متغير عشوائي متصل.

مثال (٢)

في تجربة قياس وزن طالب من طلاب كلية من الكليات، إذا كان X يمثل وزن الطالب، فإن X يكون متغيرا عشوائيا يأخذ أي قيمة في الفترة الحقيقية $[a, b]$ حيث a أقل وزن، b أكبر وزن.

٣ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع

Probability Distribution Function of a Discrete Random Variable

فيما يلي نعطى تعريفا لدالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X :

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطع مداه $\text{Range } X$ ، فإن تعيين عدد يُعبر عن احتمال وقوع الحدث E (الذى تعبر عنه القيمة x) يُعرّف دالة $f: \text{Range } X \rightarrow [0, 1]$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي *probability distribution function* وذلك كالاتي:

$$f(x) = P(X = x) = P(E)$$

وتسمى مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ توزيعا احتماليا *probability distribution* للمتغير العشوائي X .

١-٣

خواص دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع

لنفرض X متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه المجموعة X_1, X_2, \dots, X_n ، ولنفرض أننا أعطينا

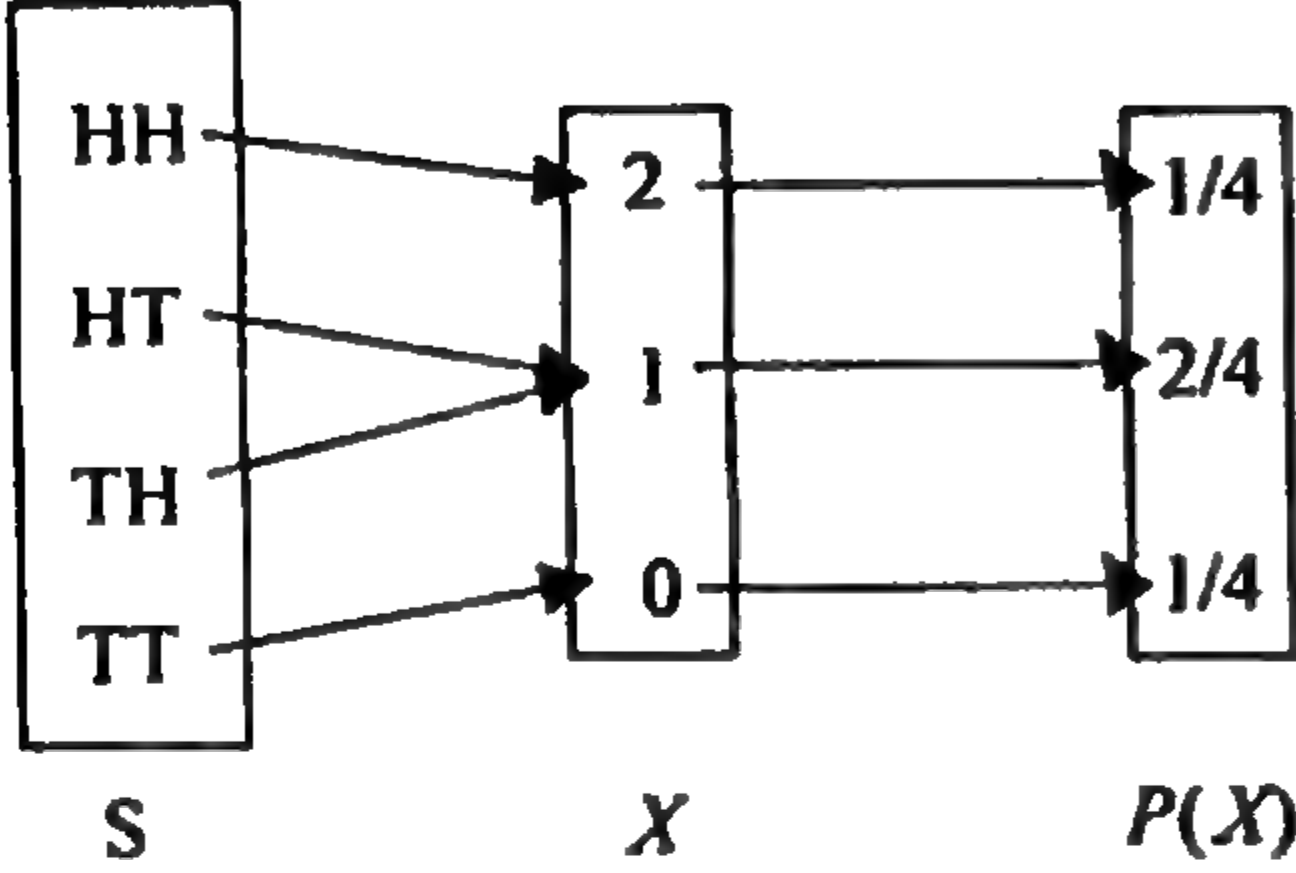
جدولاً لأزواج القيم $(X_i, f(X_i))$ ، حيث $i = 1, 2, \dots, n$. لكي نتأكد أن

الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً فإن الدالة $f(X_i)$ لابد أن تحقق الخاصيتين الآتيتين:

➤ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ فإن $f(X_i) \geq 0$

➤ $\sum_{i=1}^n f(X_i) = 1$

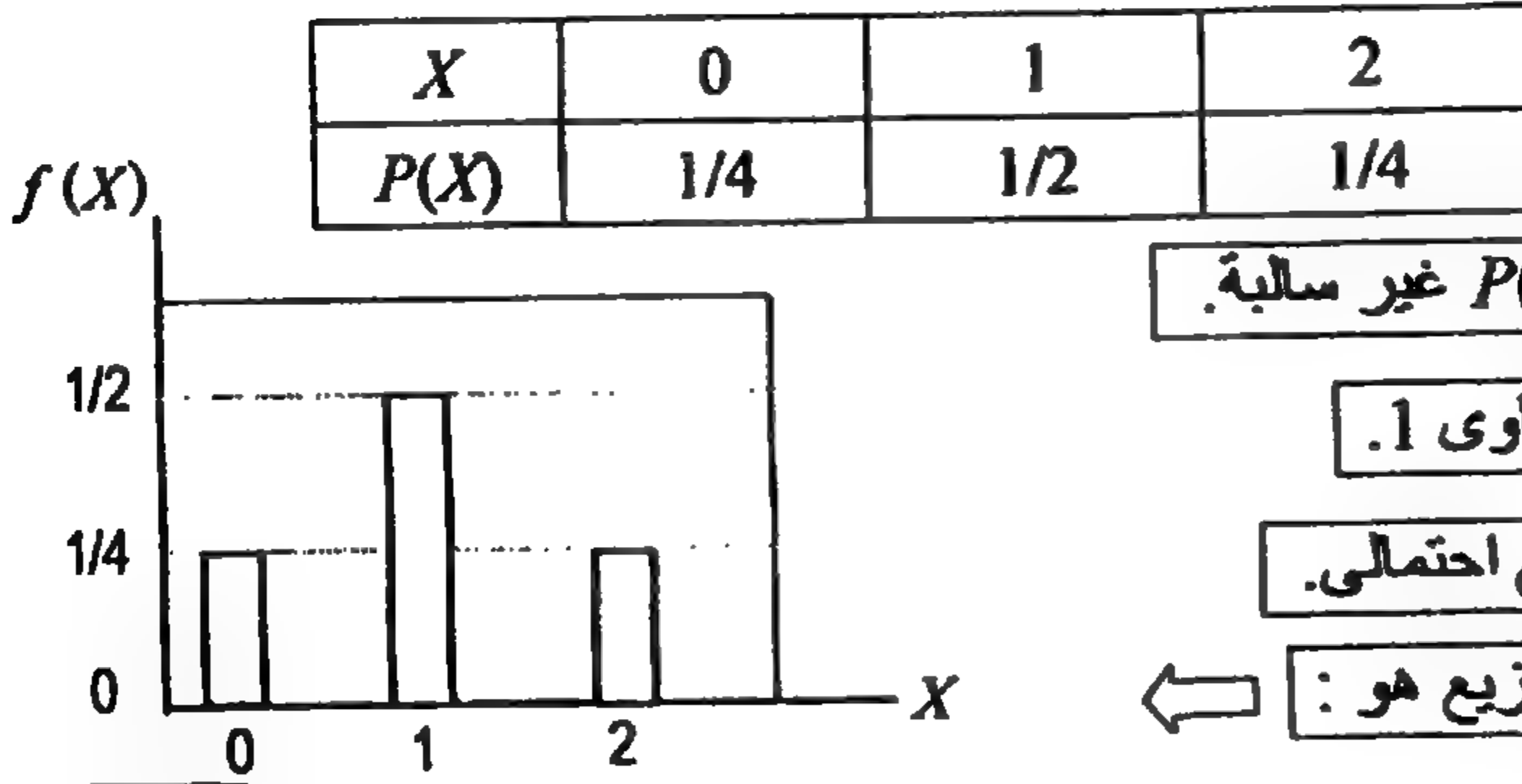
مثال (١)



في تجربة إلقاء قطعتي نقود متميزتين إذا حسبنا احتمال الأحداث المناظرة للمتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الصورة فإننا نحصل على الشكل الآتي:

لذا فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يُعبّر عن عدد الصور يمثل بالجدول

الآتي:



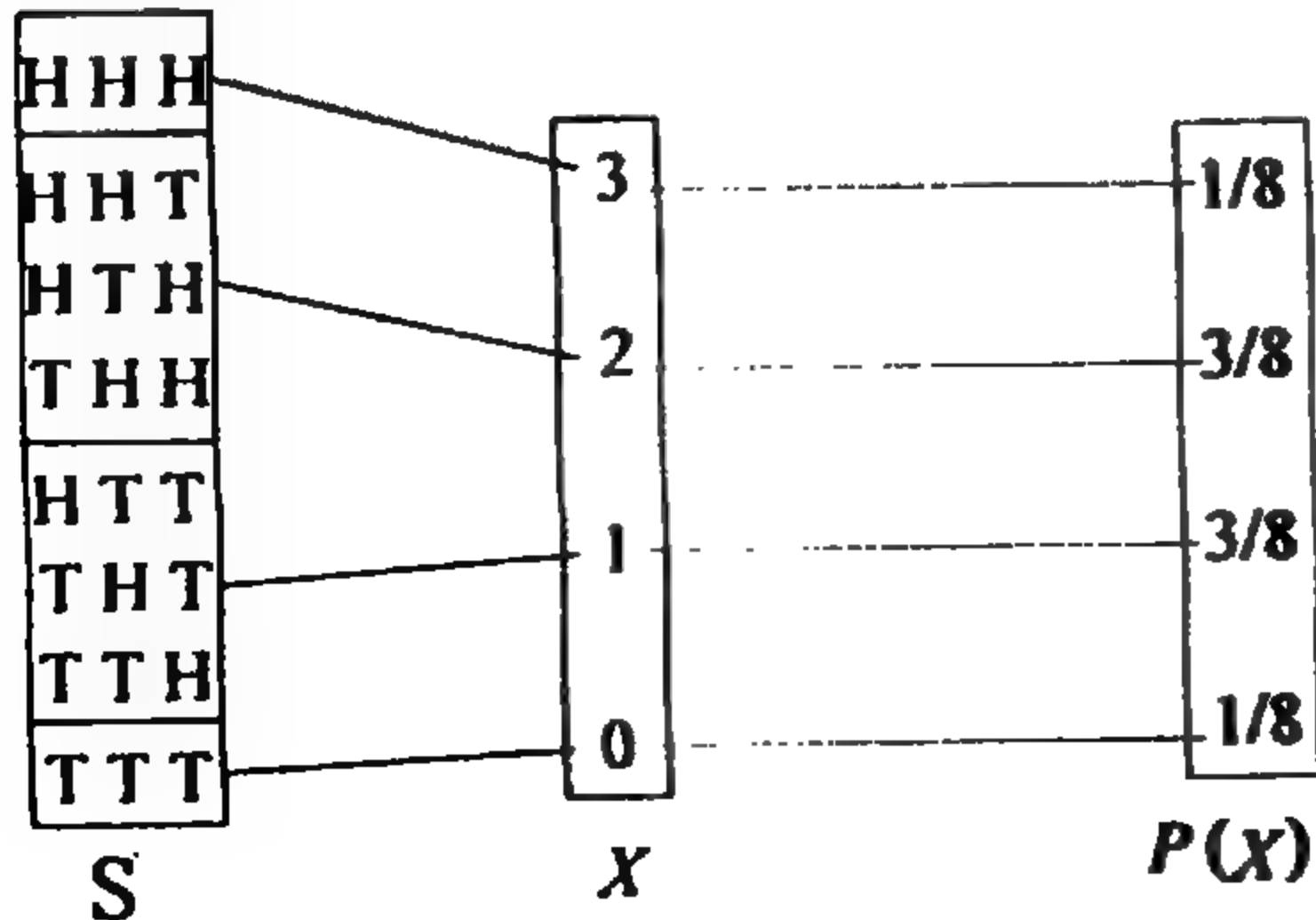
كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة.

مجموع قيم $P(X)$ يساوي 1.

إن الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً.

التمثيل البياني لهذا التوزيع هو:

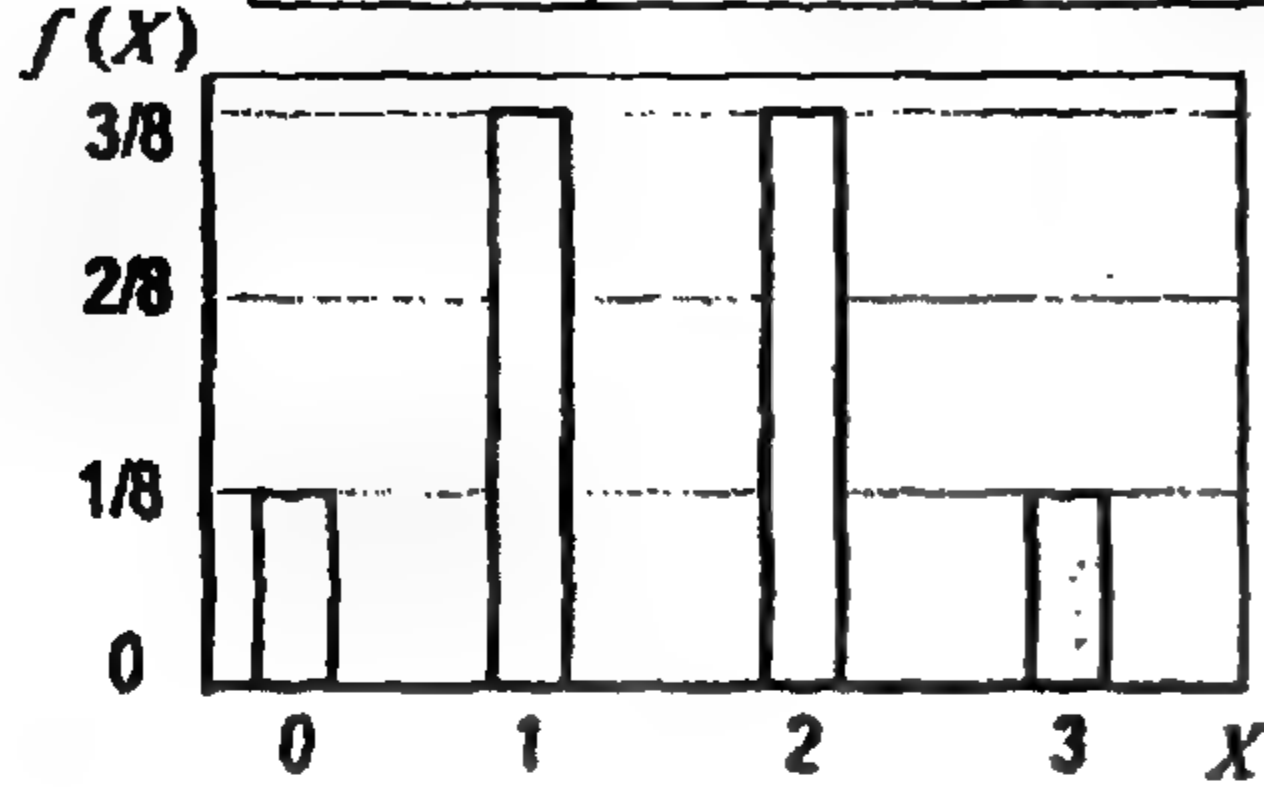
مثال (٢)



في تجربة إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات إذا حسبنا احتمال الأحداث المناظرة للمتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الصورة فإننا نحصل على الشكل الآتي:

لذا فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يُعبر عن عدد الصور يمثل بالجدول الآتي:

X	0	1	2	3
$P(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8



كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة.

مجموع قيم $P(X)$ يساوي 1.

إن الجدول يمثل توزيع احتمالي.

التمثيل البياني لهذا التوزيع هو:

مثال (٣)

في تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين إذا حسبنا احتمال الأحداث المناظرة للمتغير العشوائي الذى يدل على مجموع الوجهين فإننا نحصل على الشكل الآتي:

$\{ (1,1) \}$	2	1/36
$\{ (1,2), (2,1) \}$	3	2/36
$\{ (1,3), (2,2), (3,1) \}$	4	3/36
$\{ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \}$	5	4/36
$\{ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) \}$	6	5/36
$\{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$	7	6/36
$\{ (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) \}$	8	5/36
$\{ (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) \}$	9	4/36
$\{ (4,6), (5,5), (6,4) \}$	10	3/36
$\{ (5,6), (6,5) \}$	11	2/36
$\{ (6,6) \}$	12	1/36
S	X	$P(X)$

لذا فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذى يُعبر عن عدد الصور يمثل بالجدول الآتي:

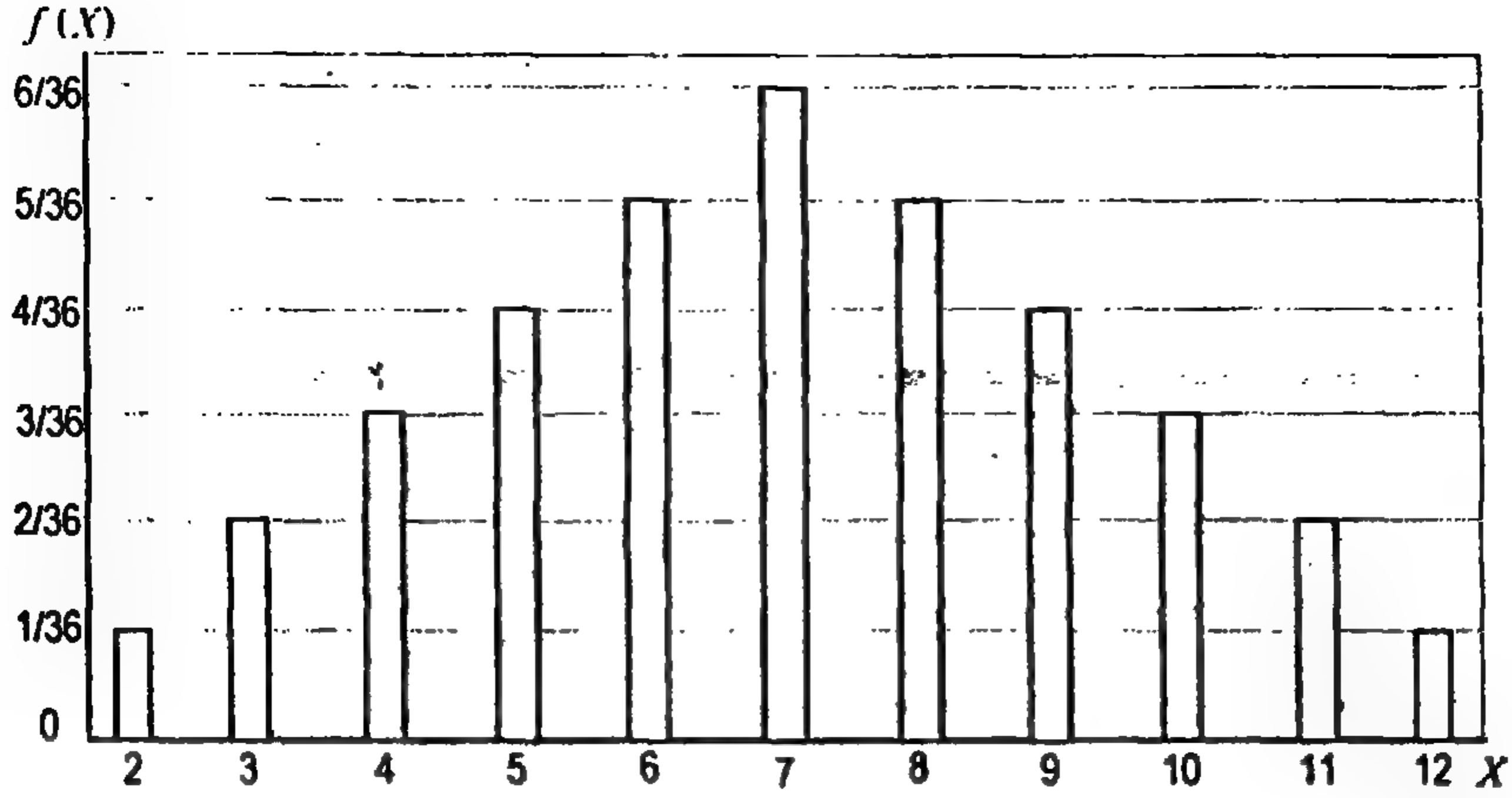
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

مجموع قيم $P(X)$ يساوي 1.

كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة.

التمثيل البياني لهذا التوزيع هو:

إن الجدول يمثل توزيع احتمالي.



مثال (٤)

اشترى طفل ثلاث بالونات. فإذا كان احتمال أن تكون البالونة صالحة يساوي 0.8 فأوجد التوزيع الاحتمالي لعدد البالونات الصالحة.

الحل

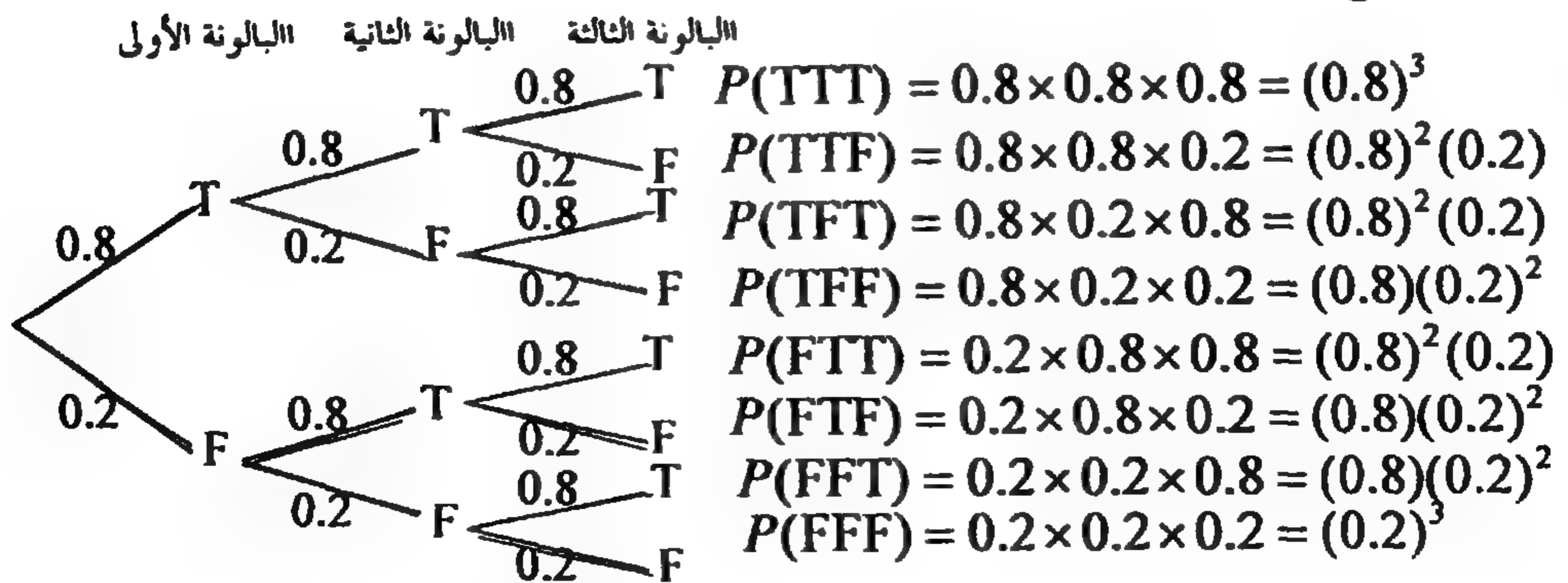
إذا رمزنا إلى البالونة الصالحة بالرمز T ولغير الصالحة بالرمز F فإن:

$$P(T) = 4/5, \quad P(F) = 1/5$$

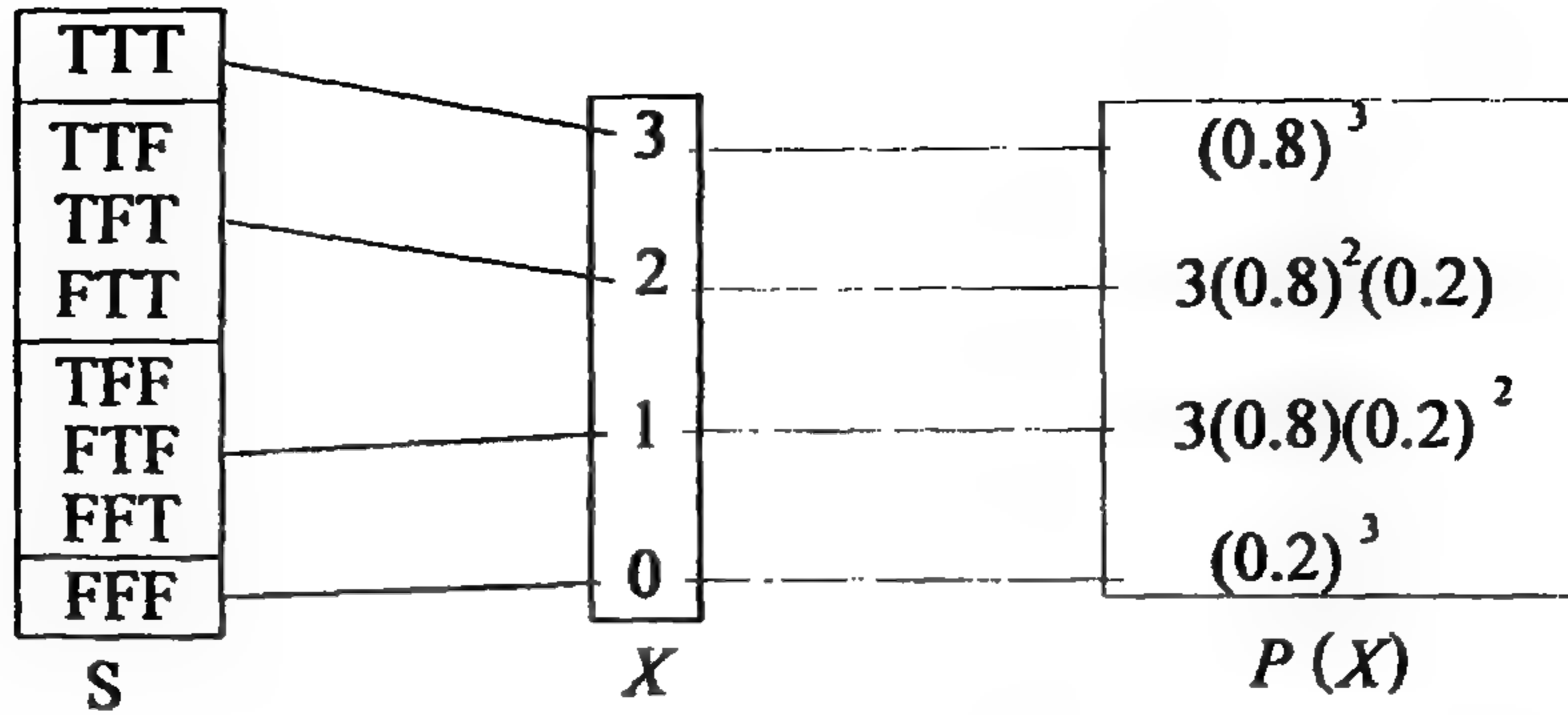
ويكون فضاء النواتج هو:

$$S = \{TTT, TTF, TFT, TFF, FTT, FTF, FFT, FFF\}$$

نستطيع رسم الشجرة الآتية :



إذا أخذنا المتغير العشوائي X ليمثل عدد البالونات الصالحة فإننا نحصل على الشكل الآتي:



الجدول الآتي يبين التوزيع الاحتمالي المطلوب:

X	0	1	2	3
$f(X)$	0.008	0.096	0.384	0.512

واضح أن كل قيمة من قيم $P(X)$ غير سالبة وأن مجموع قيم $P(X)$ يساوي 1 مما يدل على أن الجدول يمثل دالة توزيع احتمالي.

٤ دالة التوزيع التراكمية لمتغير عشوائي منقطع

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالته الاحتمالية f . فإن دالة التوزيع التراكمية F لنفس المتغير تُعرّف كما يلي:

$$F(x) = f(X \leq x)$$

أى أن:

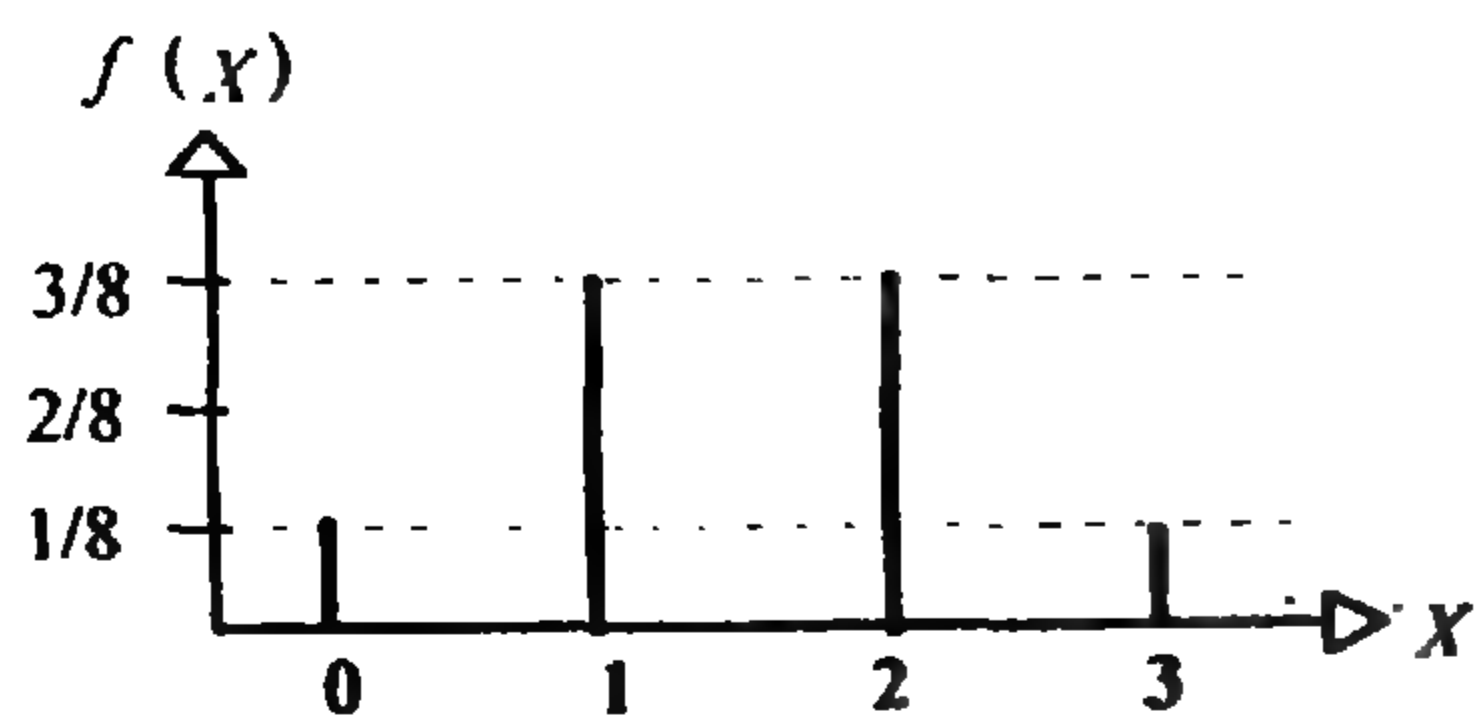
$$F(x) = \sum_{X_i \leq x} f(X_i)$$

مثال (١)

في تجربة إلقاء عملة ثلاث مرات حيث X يمثل عدد مرات ظهور الصورة تكون دالة التوزيع الاحتمالي $f(X)$ ودالة التوزيع التراكمية $F(X)$ بالجدول الآتي:

X	0	1	2	3
$f(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(X)$	1/8	4/8	7/8	1

وبين الشكل الآتي منحنى دالتى التوزيع والتوزيع التراكمية للمتغير العشوائى المذكور.



خصائص دالة التوزيع التراكمية

دالة التوزيع التراكمية لمتغير عشوائي متقطع لها الخصائص الآتية:

➤ F دالة غير تناقصية. أى أن :

$$X_1 \leq X_2 \Rightarrow F(X_1) \leq F(X_2)$$

$$F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$$

$$f(X_i) = F(X_i) - F(X_{i-1})$$

والخاصية الأخيرة تمكنا من تعيين الدالة

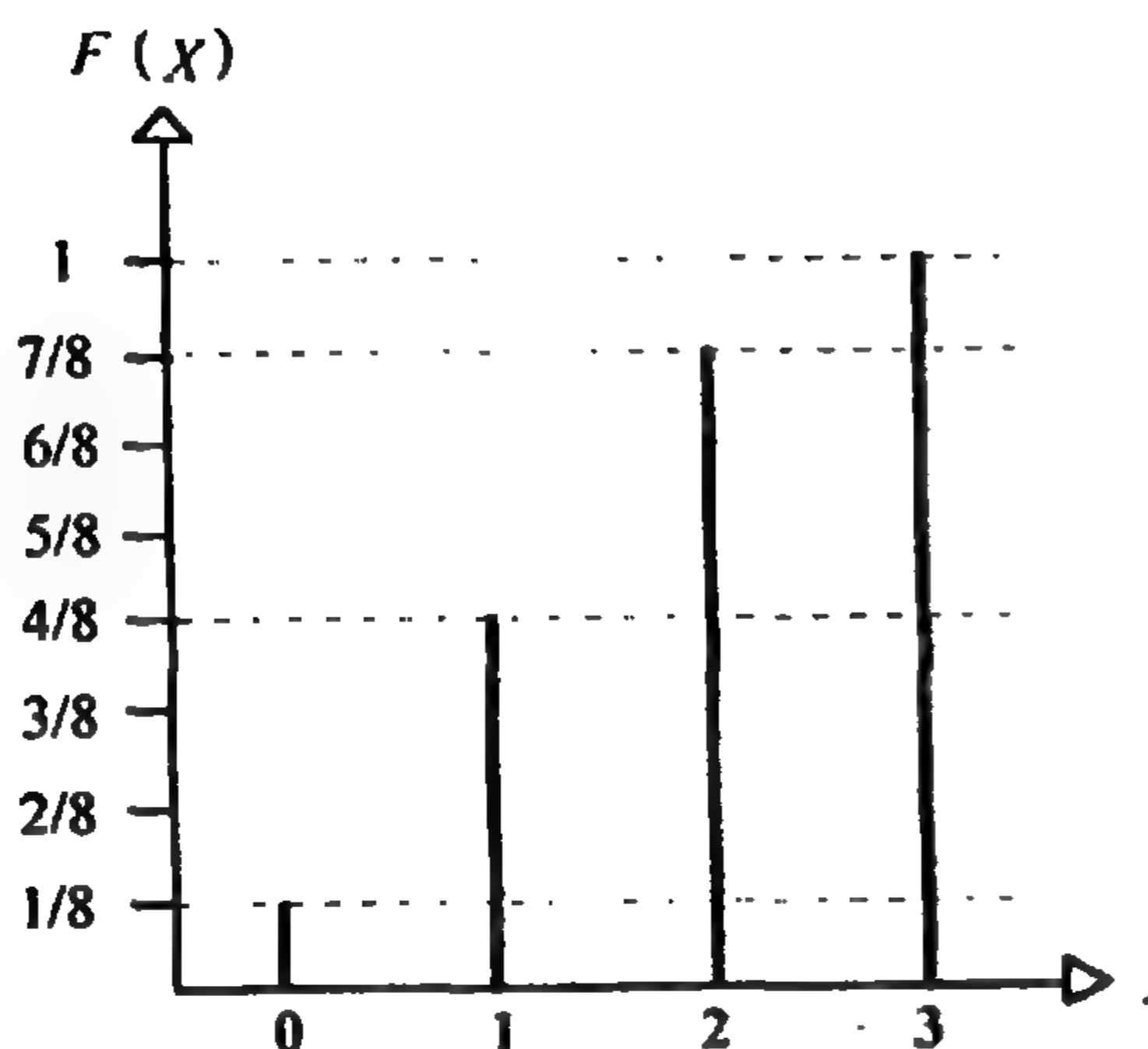
الاحتمالية f إذا علمنا دالة التوزيع

التراكمية F . ففى المثال السابق:

$$f(1) = F(1) - F(0) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = F(3) - F(2) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$$



مثال (٢)

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه التراكمية معطاه بالجدول الآتى:

X	1	2	3	4	5	6
$F(X)$	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1

أوجد دالة التوزيع الاحتمالية.

الحل

X	1	2	3	4	5	6
$F(X)$	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1
$f(X)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

مثال (٣)

أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المتقطع X الذى توزيعه الاحتمالية معطاه







$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

كالآتى:

الحل

$$\begin{aligned}
 f(X) &= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{X-1}, X = 1, 2, \dots \\
 \Rightarrow f(1) &= \left(\frac{1}{4}\right), f(2) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right), f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2, \dots \\
 \therefore F(X) &= \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{X-1} \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)\left[1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{X-1}\right] \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^X}{1 - \frac{3}{4}} \\
 &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^X
 \end{aligned}$$

٥ التوقع لمتغير عشوائي متقطع Expectation of a Discrete Random Variable
 لنفرض أننا ألقينا زهر طاولة 36 مرة ولاحظنا الوجه الأعلى في كل مرة ووجدنا الجدول التكراري الآتي:

الوجه						
القيمة X_i	1	2	3	4	5	6
التكرار f_i	5	6	8	7	4	6

نستطيع حساب المتوسط الحسابي لقيم X كالآتي:

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \sum_{i=1}^6 X_i (f_i / N) \\
 &= (1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 8 + 4 \times 7 + 5 \times 4 + 6 \times 6) / 36 \approx 3.472
 \end{aligned}$$

[لاحظ أن f_i / N هو التكرار النسبي لعدد مرات ظهور الوجه].

لنفرض أننا لم نكتف بإلقاء الزهر 36 مرة وألقيناه 360 مرة ووجدنا الآتي:

القيمة X_i	1	2	3	4	5	6
التكرار f_i	58/360	62/360	57/360	63/360	59/360	61/360

في هذه الحالة فإن المتوسط الحسابي يصبح:

$$\bar{X} = (1 \times 58 + 2 \times 62 + 3 \times 57 + 4 \times 63 + 5 \times 59 + 6 \times 61) / 360 \approx 3.517$$

أما إذا كررنا الإلقاء عددا كبيرا جدا من المرات فقد لانستطيع حساب المتوسط بنفس الطريقة ولكن إذا استبدلنا التكرار النسبي باحتمال ظهور الوجه وهو فإن المتوسط يصبح:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^6 X_i P(X_i) = \frac{(1+2+3+4+5+6) \times 1}{6} = 3.5$$

وهذا ما يعرف بـ القيمة المتوقعة *expected value* للمتغير العشوائي X وتمثل القيمة التي تتركز عندها قيم المتغير العشوائي. وسنعطى التعريف الآتي:

ليكن X متغيرا عشوائيا مداه X_1, X_2, \dots, X_n ولتكن f دالة توزيع احتمالي للمتغير X . فإن القيمة المتوقعة *expected value* أو μ للتوزيع الاحتمالي $(X_i, f(X_i))$ هي:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n X_i f(X_i)$$

هذا؛ وينظر القيمة المتوقعة في نظرية الاحتمالات القيمة المتوسطة (المتوسط الحسابي) في

مثال (١).

احسب التوقع الرياضي للتوزيع الاحتمالي لتجربة إلقاء عملة معدنية مرتين حيث المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

من جدول التوزيع الاحتمالي:

X_i	0	1	2	المجموع
$P(X_i)$	1/4	1/2	1/4	1

نجد أن:

$$\mu = \sum_{i=0}^2 X_i P(X_i) = 0 \times P(0) + 1 \times P(1) + 2 \times P(2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

مثال (٢).

احسب التوقع الرياضي للتوزيع الاحتمالي لتجربة إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات حيث المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

من جدول التوزيع الاحتمالي:

X_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

نجد أن:

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{i=0}^3 X_i P(X_i) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) \\ &= 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

مثال (٣)

احسب التوقع الرياضى للتوزيع الاحتمالى لتجربة إلقاء زهرى نرد متمايزين حيث المتغير العشوائى هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

من جدول التوزيع الاحتمالى:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

نجد أن:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \sum_{i=2}^{12} X_i f(X_i) \\ &= 2 \left(\frac{1}{36} \right) + 3 \left(\frac{2}{36} \right) + 4 \left(\frac{3}{36} \right) + 5 \left(\frac{4}{36} \right) + 6 \left(\frac{5}{36} \right) + 7 \left(\frac{6}{36} \right) \\ &\quad + 8 \left(\frac{5}{36} \right) + 9 \left(\frac{4}{36} \right) + 10 \left(\frac{3}{36} \right) + 11 \left(\frac{2}{36} \right) + 12 \left(\frac{1}{36} \right) = 7\end{aligned}$$

خصائص التوقع لمتغير عشوائى متقطع

للتوقع الرياضى لدالة الخصائص الآتية:

➤ لى مقدار ثابت C فإن $E(C) = C$

➤ لى ثابتين a, b فإن $E(aX + b) = aE(X) + b$

٦ التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

فى معظم الأحيان تؤخذ القيمة المتوقعة أساسا لاتخاذ القرارات فى ظل عدم تأكدنا من النتائج. ولكن قد يحدث أحيانا أن تتفق مجموعتان من البيانات فى قيمتهما المتوقعة ولكن مفردات إحداها تكون أكثر تشتتا من مفردات الأخرى. من هنا ظهرت أهمية وجود مقياس آخر يقيس مدى تشتت المفردات.

وهذا المقياس هو التباين الذى يقيس انتشار (تشتت) قيم المتغير العشوائى حول الوسط الحسابى ويُعرف كالاتى:

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالته الاحتمالية f . فإن التباين $variance$ هو:

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 f(X_i)$$

ويُعرف الانحراف المعياري σ بأنه يساوي الجذر التربيعي للتباين. أي:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 f(X_i)}$$

مثال (١)

يريد مدير الاستثمار لأحد البنوك اختيار شراء أسهما وكان المعروض نوعان منها والجدولان الآتيان يمثلان التوزيع الاحتمالي لأسعار النوعين

النوع Y	
السعر (جنيه)	الاحتمال
28	0.20
29	0.20
30	0.20
31	0.20
32	0.20

النوع X	
السعر (جنيه)	الاحتمال
10	0.10
20	0.25
30	0.30
40	0.25
50	0.10

احسب التوقع والتباين لكل نوع. لأي نوع يفضل أن يكون الشراء؟

الحل

$(Y - \mu)^2 P(Y)$	$XP(X)$	$P(Y)$	Y
$4 \times 0.20 = 0.8$	5.6	0.20	28
$1 \times 0.20 = 0.2$	5.8	0.20	29
$0 \times 0.20 = 0$	6.0	0.20	30
$1 \times 0.20 = 0.2$	6.2	0.20	31
$4 \times 0.20 = 0.8$	6.4	0.20	32
$\sigma^2 = 2.00$	$\mu = 30$		

$(X - \mu)^2 P(X)$	$XP(X)$	$P(X)$	X
$400 \times 0.10 = 40$	1	0.10	10
$100 \times 0.25 = 25$	5	0.25	20
$0 \times 0.30 = 0$	9	0.30	30
$100 \times 0.25 = 25$	10	0.25	40
$400 \times 0.10 = 40$	5	0.10	50
$\sigma^2 = 130$	$\mu = 30$		

واضح أن قرار الشراء سيكون في صالح النوع Y .

نظرية

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 f(X_i) - \mu^2$$

البرهان

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 f(X_i) = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2) f(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 f(X_i) - 2\mu \sum_{i=1}^n X_i f(X_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^n f(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i^2 f(X_i) - \mu^2 \end{aligned}$$

مثال (٢)

احسب التوقع الرياضي والتباين للتوزيع الاحتمالي لتجربة إلقاء عملة معدنية مرتين حيث المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

نكون الجول الآتي:

X_i	$f(X_i)$	$X_i f(X_i)$	$X_i^2 f(X_i)$
0	1/4	0	0
1	1/2	1/2	1/2
2	1/4	1/2	1
		$\mu = 1$	$\sigma^2 = 1.5 - (1)^2 = 0.5$ $\therefore \sigma = \sqrt{0.5} = 0.7$

مثال (٣)

احسب التوقع الرياضي والتباين للتوزيع الاحتمالي لتجربة إلقاء عملة معدنية ثلاث مرات حيث المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

نكون الجول الآتي:

X_i	$f(X_i)$	$X_i f(X_i)$	$X_i^2 f(X_i)$
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8
3	1/8	3/8	9/8
		$\mu = 3/2$	$\sigma^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$ $\therefore \sigma = \sqrt{0.75} = 0.87$

خصائص التباين لمتغير عشوائي منقطع

$$\boxed{Var(c) = 0} \quad , \quad \boxed{Var(cX) = c^2 V(X)} \quad , \quad \boxed{Var(aX + b) = a^2 V(X)}$$

تمرين ٤ (أ)

١. عند توقيع الكشف الطبى على الطلاب المتقدمين للكليات العسكرية يكون مطلوب قياس أطوال الطلاب (بالستيمتر) وقوة إبصارهم بالقيم $\frac{6}{6}$ ، $\frac{6}{9}$ ، $\frac{6}{12}$ ، ...، $\frac{6}{60}$ لكل عين من العينين. أى من هذه القياسات يُعرّف متغيراً عشوائياً متقطعاً وأيهما يُعرّف متغيراً عشوائياً متصلاً؟
٢. عند إجراء إحصاء عدد أجهزة التلفزيون التى تملكها الأسر فى حى من أحياء مدينة ما، إذا كان X يمثل عدد الأجهزة، هل X متغير عشوائى متقطع أم متصل؟
٣. فى تجربة إلقاء زهرى نرد متميزتين مرة واحدة أوجد التوزيع الاحتمالى للتوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X الذى يعرف كالتالى:
$$X = \max(m, n)$$
 حيث m ، n قراءتا وجهى الزهر.
٤. إذا كان احتمال النجاح فى مادة من المواد يساوى 0.7 وأخذنا عينة من أربعة طلاب فأوجد التوزيع الاحتمالى لعدد الطلاب الناجحين فى المادة.
٥. إذا كانت العبوة من حبوب الزهور تحتوى على ثمان حبوب تنتج زهوراً حمراء، عشر حبوب تنتج زهوراً صفراء وزرعنا خمس حبوب فأوجد التوزيع الاحتمالى لعدد الزهور الصفراء المستنبطة.
٦. ما هو احتمال أن تحتوى مجموعة من ١٣ كارت من أوراق اللعب على:
(أ) صفر آس (ب) واحد آس (ج) اثنين آس (د) ثلاثة آس (هـ) أربعة آس؟
٧. كيس يحتوى على عشر كور منها أربع معيبة. فإذا اخترنا ثلاث كور عشوائياً فما هو احتمال أن تكون:

(أ) كلها سليمة (ب) واحدة منها معيبة (ج) إثنان منها معيبتان (د) كلها معيبة؟

٨. مصنع ينتج آلات حاسبة على دفعات كل دفعة تحتوي على ١٠٠ آلة. فإذا كان احتمال أن تحتوي كل دفعة على أربع آلات معيبة واختارنا ثلاث آلات عشوائيا، فما هو احتمال أن تكون:

(أ) كلها سليمة (ب) واحدة منها معيبة (ج) إثنان منها معيبتان (د) كلها معيبة؟

٩. أثبت أن كلا من الجداول الآتية يمثل توزيعا احتماليا وأوجد توقعه وتباينه:

(أ)	X	1	3	4	7	9	10	14	18
	$P(X=x)$	0.11	0.07	0.13	0.28	0.18	0.05	0.12	0.06

(ب)	X	3	5	7	8	9	10	12	16
	$P(X=x)$	0.08	0.10	0.16	0.25	0.20	0.03	0.13	0.05

١٠. أوجد قيمة الثابت C لكي يكون كلا من الجداول الآتية يمثل توزيعا احتماليا وأوجد توقعه وتباينه:

(أ)	X	1	2	3	4	5	6	7
	$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	C

(ب)	X	-1	2	5	8
	$f(X)$	0.3	C	0.2	0.1

أوجد أيضا:

$$P(X \geq 0), P(0 \leq X \leq 5), P(X > 9), P(X \leq -2)$$

١١. ألقى حجر نرد مرتين. إذا كان X يمثل الفرق المطلق بين السوجهين فأوجد التوقع والتباين للمتغير العشوائي X .

١٢. يوجد بمخزن للأجهزة الكهربائية عدد 7 آلات حاسبة منها 2 معيبتان واشترى منها مكتب محاسبة ثلاث آلات. فإذا كان المتغير X يمثل عدد الآلات المعيبة فاكتمل التوزيع الاحتمالي للمتغير X واحسب توقعه وتباينه.

١٣. وجد أن حضور الجمهور لمشاهدة مباريات كرة القدم في استاد مدينة من المدن

الأوربية يتبع النمط الآتى:

إذا كان الجو قارص البرودة فإن عدد الحضور يكون 30,000 وإذا كان الجو باردا فإن عدد الحضور يكون 40,000 وإذا كان الجو معذلا فإن عدد الحضور يكون 60.000 أما إذا كان الجو دافئا فإن عدد الحضور يزداد إلى 80,000. فإذا كان احتمال أن يكون الجو فى الحالات الأربع يساوى 0.08 ، 0.42 ، 0.42 ، 0.08 على الترتيب فأوجد العدد المتوقع للحضور.

١٤. الجدول الآتى يعطى النسب المختلفة لإنجاب الأطفال لزوج وزوجة فى متوسط العمر فى بلدة ما:

عدد الأطفال	0	1	2	3
النسبة	10.2%	15.9%	31.8%	42.1%

فإذا اختيرت عائلة عشوائيا، أوجد عدد الأطفال المتوقع.

الدرس الخامس
توزيعات المتغير العشوائى المتقطع

DISCRETE RANDOM VARIABLE DISTRIBUTIONS

٥-١ توزيع ذى الحدين The Binomial Distribution

تؤكد توزيع ذى الحدين عن نموذج ابتدعه العالم الرياضى برنولى فى القرن السابع عشر. لذا يطلق على هذا التوزيع أحيانا اسم محاولة برنولى *Bernoulli Trial*. ونعطى التعريف الآتى لنموذج ذى الحدين:

يتكون نموذج ذى الحدين من متتابعة من n من المحاولات تحقق الشروط الآتية:

- كل المحاولات متطابقة.
- لكل محاولة نتيجتان: نجاح *success* أو فشل *fail*.
- احتمال النجاح p واحتمال الفشل $q = 1 - p$ بظلال ثابتان فى كل المحاولات.
- كل المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.

فمثلا إلقاء عملة معدنية عدة مرات للحصول على صورة، إطلاق أعيرة نارية لمحاولة إصابة الهدف؛ تكرار الامتحان فى مقرر من المقررات بغية النجاح؛ كل هذه تندرج تحت اسم نموذج ذى الحدين.

مثال

نفرض أن لدينا قطعة نقود غير منتظمة وأن لدينا من القرائن ما يجعلنا نعتقد أن احتمال ظهور الصورة فى الرمية الواحدة يساوى 0.6 واحتمال ظهور الكتابة فى الرمية الواحدة 0.4. إذا كررنا الرمي ثلاث مرات، فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

فضاء النواتج هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$$\triangleq \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$$

احتمالات هذه النواتج غير متساوية وهى:

$$P(\{w_1\}) = (0.6)^3 = 0.216,$$

$$P(\{w_2\}) = P(\{w_3\}) = P(\{w_4\}) = (0.6)^2(0.4) = 0.144,$$

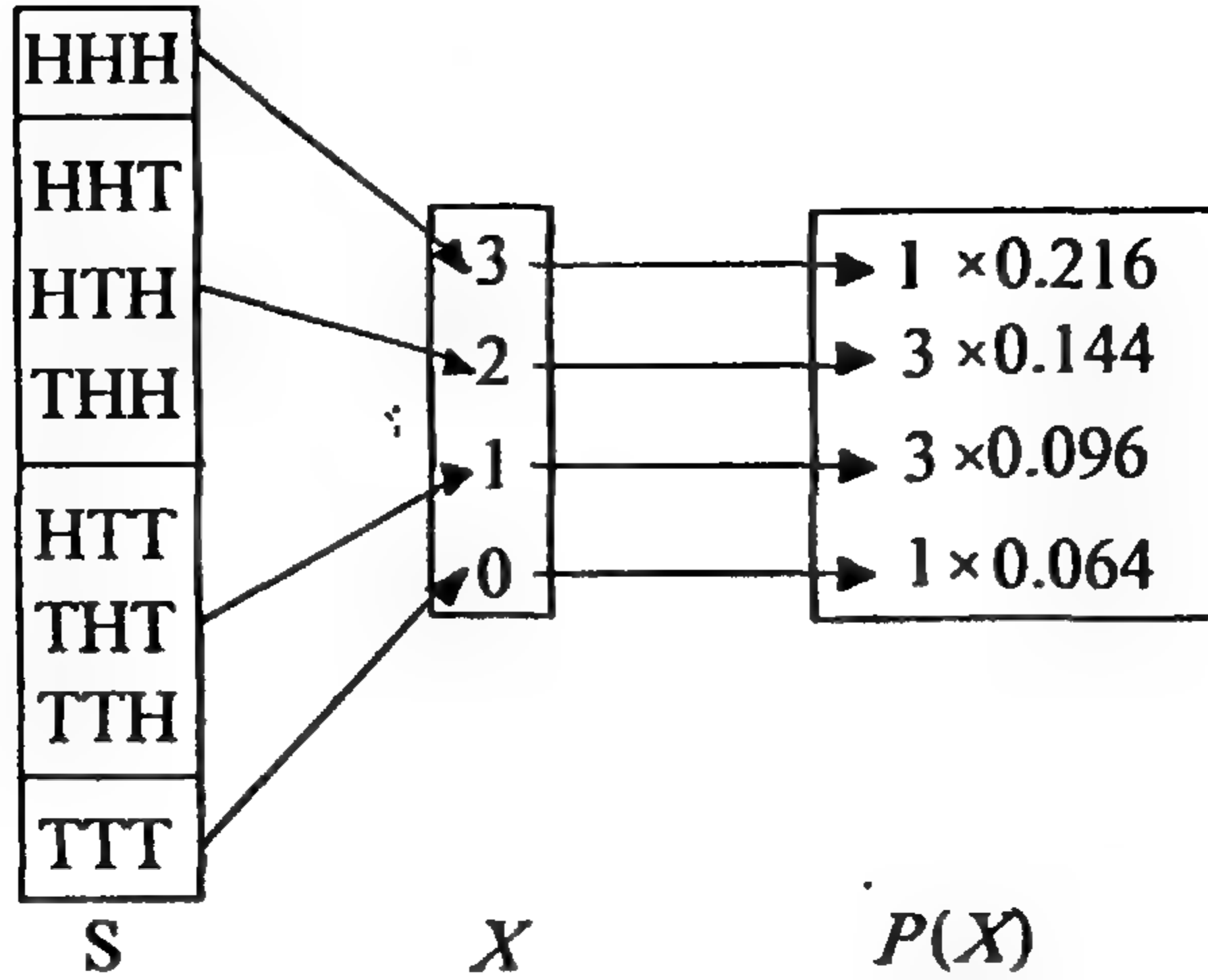
$$P(\{w_5\}) = P(\{w_6\}) = P(\{w_7\}) = (0.6)(0.4)^2 = 0.096,$$

$$P(\{w_8\}) = (0.4)^3 = 0.064.$$

وحيث أن المتغير العشوائى X هو عدد مرث ظهور الصورة فإن التوزيع الاحتمالى لهذا المتغير

يكون مبينا بالشكل الآتى:





وبوجه عام إذا كررنا الرمي n من المرات فإن المتغير العشوائى يكون توزيعه الاحتمالى هو:

$$b(n, x; p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}, q = 1 - p$$

ويمثل $b(n, x; p)$ احتمال نجاح المتغير العشوائى x من المرات n فى n من المحاولات إذا كان احتمال النجاح فى المرة الواحدة يساوى p . ويسمى توزيع ذى الحدين بمعلمتين n ، p .

١-١-٥ دالة التوزيع التراكمية

تُعرف دالة توزيع ذى الحدين التراكمية كالآتى:

$$B(n, k; p) = P(X \leq k) = \sum_{x=0}^k b(n, x, p)$$

هذا. وتوجد جداول لـ $B(n, x; p)$ عند القيم:

$$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25$$

لقيم p المختلفة. ونستطيع استنتاج $b(n, x; p)$ من $B(n, x; p)$ كالآتى:

$$b(n, k; p) = B(n, k; p) - B(n, k-1; p)$$

مثال (١)

إذا كان احتمال إصابة الهدف لجندى قناص هو 0.9 فى كل مرة ورمى هذا الجندى خمس رميات فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد مرات إصابة الهدف واحسب احتمال:

- (أ) عدم إصابة الهدف.
- (ب) إصابة الهدف مرتين.
- (ج) إصابة الهدف أربع مرات.
- (د) إصابة الهدف أكثر من مرتين.
- (هـ) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل.

الحل

$$P(X = k) = b(5, k, 0.9) = \binom{5}{k} (0.9)^k (0.1)^{5-k}$$

(أ) احتمال عدم إصابة الهدف يساوي:

$$b(5, 0, 0.9) = (0.1)^5 = 0.00001$$

(ب) احتمال إصابة الهدف مرتين يساوي:

$$b(5, 2, 0.9) = B(5, 2; 0.9) - B(5, 1; 0.9) = 0.009 - 0.000 = 0.009$$

$B(5, k; p)$

$k \backslash p$.05	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.00	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

(ج) احتمال إصابة الهدف أربع مرات يساوي:

$$b(5, 4, 0.9) = B(5, 4; 0.9) - B(5, 3; 0.9) = 0.410 - 0.081 = 0.329$$

$B(5, k; p)$

$k \backslash p$.05	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.00	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

(د) احتمال إصابة الهدف أكثر من مرتين يساوي:

$$b(5, 3; 0.9) + b(5, 4; 0.9) + b(5, 5; 0.9) = 1 - B(5, 2; 0.9)$$

$$= 1 - 0.009 = 0.991$$

(هـ) احتمال إصابة الهدف مرة على الأقل يساوي:

$$1 - b(5, 0; 0.9) = 1 - (0.1)^5$$

مثال (٢)

مشغل به 6 ماكينات خياطة متطابقة ومتمايزة، إذا كان احتمال أن تحتاج أى ماكينة إلى إصلاح خلال عام يساوى 0.1 واحتمال ألا تحتاج الماكينة إلى إصلاح 0.9 فكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يدل على عدد الماكينات التى تحتاج إلى إصلاح واحسب احتمال:

- (أ) ألا تحتاج أى من الماكينات إلى إصلاح. (ب) أن تحتاج ماكيتان إلى إصلاح.
(ج) أن تحتاج ماكيتان على الأكثر إلى إصلاح. (د) أن تحتاج ماكيتان على الأقل إلى إصلاح.

الحل

التوزيع الاحتمالى هو:

$$b(6, k, 0.1) = \binom{6}{k} (0.1)^k (0.9)^{6-k}$$

(أ) احتمال ألا تحتاج أى من الماكينات إلى إصلاح هو:

$$b(6, 0, 0.1) = (0.9)^6$$

(ب) احتمال أن تحتاج ماكيتان إلى إصلاح هو:

$$b(6, 2, 0.1) = B(6, 2, 0.1) - B(6, 1, 0.1) = 0.984 - 0.886 = 0.098$$

$n = 6$

$k \backslash p$.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.967	0.886	0.655	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.002	0.000	0.000
2	0.998	0.984	0.901	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.017	0.001	0.000
3	1.000	0.999	0.983	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.099	0.016	0.002
4	1.000	1.000	0.998	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.345	0.114	0.033
5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0.882	0.738	0.469	0.265
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

(ج) احتمال أن تحتاج ماكيتان على الأكثر إلى إصلاح هو:

$$b(6, 0, 0.1) + b(6, 1, 0.1) + b(6, 2, 0.1) = B(6, 2, 0.1) = 0.984$$

(د) احتمال أن تحتاج ماكيتان على الأقل إلى إصلاح هو:

$$\begin{aligned} b(6, 2, 0.1) + b(6, 3, 0.1) + b(6, 4, 0.1) + b(6, 5, 0.1) + b(6, 6, 0.1) &= 1 - B(6, 1, 0.1) \\ &= 1 - 0.886 \\ &= 0.114 \end{aligned}$$

٢-١-٥ توقع وتباين توزيع ذى الحدين

يمكن أن نثبت أن توقع توزيع ذى الحدين هو:

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

وأن تباين توزيع ذى الحدين هو:

مثال (١)

إذا كان احتمال إصابة الهدف لجندى قناص هو 0.9 فى كل مرة ورمى هذا الجندى أربع رميات فأوجد متوسط التوزيع الاحتمالى والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد مرات إصابة الهدف.

الحل

$$\mu = np = 4 \times 0.9 = 3.6$$

$$\sigma^2 = npq = 4 \times 0.9 \times 0.1 = 0.36$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{0.36} = 0.6$$

مثال (٢)

سحبت كرة من كيس يحتوى على 10 من الكرات، منها كرتين معيتين وذلك 7 مرات مع الإحلال. احسب متوسط التوزيع الاحتمالى والانحراف المعيارى لعدد الكرات المعيبة.

الحل

$$\mu = np = 7 \times 0.2 = 1.4$$

$$\sigma^2 = npq = 7 \times 0.2 \times 0.8 = 1.12$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{1.12} = 1.059$$

مثال (٣)

إذا كان X متغير عشوائى متقطع يتبع توزيع ذى الحدين متوسطه 2 وتباينه $\frac{4}{3}$ فأوجد $P(X \geq 4)$.

الحل

$$np = 2, \quad npq = \frac{4}{3}$$

$$\therefore q = \frac{4}{3} \div 2 = \frac{2}{3}, \quad p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 2 \div \frac{1}{3} = 6$$

$$\therefore P(X \geq 4) = b(6, 4; \frac{1}{3}) + b(6, 5; \frac{1}{3}) + b(6, 6; \frac{1}{3})$$

$$\begin{aligned} &= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= 15 \times \frac{1}{81} \times \frac{4}{9} + 6 \times \frac{1}{243} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{729} = \frac{73}{729} \end{aligned}$$

٢.٥ توزيع بواسون Poisson Distribution

علمنا أن توزيع توزيع ذي الحدين يتضمن تكرار تجربة عشوائية لها ناتجان (نجاح - فشل) عدد n من المرات المستقلة مع ثبات احتمال النجاح p . ومع أن توزيع توزيع ذي الحدين له تطبيقات عديدة، إلا أنه توجد في حياتنا اليومية تطبيقات يصعب فيها تطبيق هذا التوزيع. فمثلاً عندما يكون عدد مرات تكرار التجربة العشوائية n كبير وعندما يكون احتمال النجاح p صغير جداً. فمثلاً:

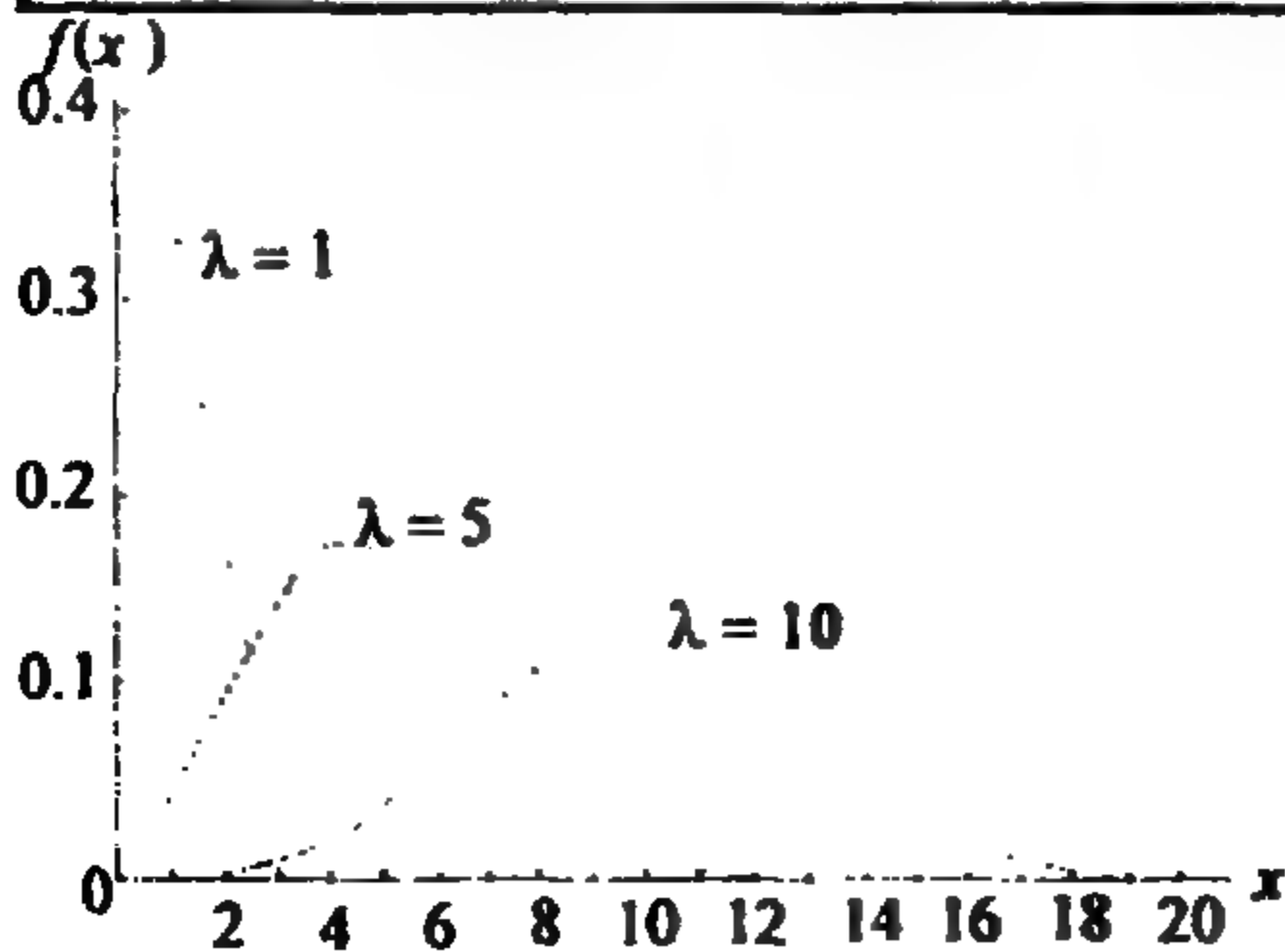
- عدد السيارات التي تمر من بوابة الرسوم في فترة معينة.
 - عدد المكالمات التليفونية التي يتلقاها سترال مؤسسة في فترة معينة.
 - عدد الحوادث المرورية في الأسبوع أو الشهر.
 - عدد المشترين الذين يصلون عند ماكينة الحساب في متجر كبير في فترة معينة.
 - عدد الأخطاء الإملائية في صفحات كتاب.
- في مثل هذه الحالات فإن تطبيق توزيع بواسون يكون أقل صعوبة من توزيع ذي الحدين. وسنعطى التعريف الآتي:

يقال أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda > 0$ إذا كانت دالته الاحتمالية f على الصورة:

$$f(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

هذا؛ ويمكن استنتاج توزيع بواسون كحالة نهائية من توزيع ذي الحدين.

ليكن توزيع ذي الحدين بمعلمتين n, p ولتكن n كبيرة كثيراً كافياً، p صغيرة صفراً كافياً بحيث np إلى مقدار محدود λ . فإن توزيع ذي الحدين يؤول إلى توزيع بواسون بمعلمة λ .



وتفسر المعلمة λ على أنها متوسط مرات النجاح في الفترة الزمنية المحددة. وبين الشكل الآتي منحنيات دالة توزيع بواسون لقيم مختلفة للمعلمة λ : \leftarrow هذا، وتوجد جداول لحساب $f(x)$ لقيم مختلفة للمعلمة λ .

٢-٢-٥ توقع وتباين توزيع بواسون

يمكن أن تثبت أن توقع وتباين توزيع بواسون هما:

$$\sigma^2 = \lambda, \quad \mu = \lambda$$

مثال (١)

وجد المختصون في متجر للأجهزة المنزلية أن متوسط الطلب اليومي على أجهزة التلفزيون يساوي 3 من كل 100 من العملاء. فإذا بيع في يوم من الأيام 50 جهازا متريا فما هو احتمال أن يكون أكثر من ثلاثة من هذه الأجهزة تلفزيونات؟

الحل

لنأخذ المتغير العشوائي X ليكون هو عدد الطلبات من أجهزة التلفزيون. حيث أن احتمال الطلب على أجهزة التلفزيون هو 0.03 فقط، عدد الأجهزة المنزلية يساوي 50، إذن فالتوزيع الاحتمالي المناسب هو توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 50 \times 0.03 = 1.5$.

$$f(X = x) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\ = 1 - [0.223 + 0.335 + 0.251 + 0.126] = 0.065$$

x	λ						
	.2	.5	.8	1	1.5	2	2.5
0	.8187	.6035	.4493	.3679	.2231	.1353	.0821
1	.1637	.3033	.3595	.3679	.3347	.2707	.2052
2	.0164	.0758	.1438	.1839	.2510	.2707	.2565
3	.0011	.0126	.0383	.0613	.1255	.1804	.2138
4	.0011	.0016	.0077	.0153	.0471	.0902	.1336
5		.0002	.0012	.0031	.0141	.0361	.0668
6			.0002	.0005	.0035	.0120	.0278
7				.0001	.0008	.0034	.0099
8					.0001	.0009	.0031
9						.0002	.0009
10							.0002

مثال (٢)

إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى الغابات يساوي 3 فما احتمال عدم حدوث حرائق في تلك الغابة على مدى شهر؟ وما احتمال حدوث حريقين أو أقل في الشهر؟

الحل

لنأخذ المتغير العشوائي X ليكون هو عدد الحرائق في الشهر. بفرض أن التوزيع الاحتمالي يتبع توزيع بواسون، وحيث أن احتمال حدوث حريق في الشهر هو 3، إذن $\lambda = 3$.

$$f(X = x) = \frac{e^{-3} (3)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

احتمال عدم حدوث حرائق في الشهر هو:

$$f(0) = \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = e^{-3} = 0.0498$$

احتمال حدوث حريقين أو أقل في الشهر هو:

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) &= \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} = e^{-3} + 3e^{-3} + 4.5e^{-3} \\ &= 8.50 \times 0.0498 = 0.423 \end{aligned}$$

x	λ							
	3	4	5	6	8	10	15	20
0	.0498	.0183	.0067	.0025	.0003			
1	.1494	.0733	.0337	.0149	.0027	.0005		
2	.2240	.1465	.0842	.0446	.0107	.0023		
3	.2240	.1954	.1404	.0892	.0286	.0076	.0002	

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = 0.4232$$

مثال (٣)

أظهرت سجلات الأرصاد في مدينة أوروبية أن الثلوج تتساقط بمعدل أربعة أيام في شهر نوفمبر. استخدم نموذج بواسون في إيجاد احتمال أن تتساقط الثلوج ثلاثة أيام على الأكثر في نوفمبر القادم.

الحل

$$n = 30, \quad p = 4/30, \quad \lambda = np = 30(4/30) = 4.$$

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) &= 0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 \\ &= 0.4335 \end{aligned}$$

٣.٥ التوزيع الهندسي The Geometric Distribution

ليكن لدينا تجربة عشوائية لها نتيجتين (نجاح - فشل) وليكن احتمال النجاح يساوي p ، واحتمال الفشل يساوي $q = 1 - p$ ولنفرض أننا كررنا التجربة للحصول على أول نجاح. ليكن X متغيراً عشوائياً يُعبّر عن عدد مرات تكرار التجربة للحصول على النجاح. فمثلاً إذا رمينا قطعة نقود معدنية عدة مرات للحصول على الصورة، وكان احتمال ظهور الصورة يساوي $1/3$ ، احتمال ظهور الكتابة يساوي $2/3$ فسنجد الآتي:

- احتمال الحصول على الصورة في المرة الأولى يساوي $1/3$.
- الحصول على الصورة في المرة الثانية يعني أننا حصلنا على الكتابة في المرة الأولى والصورة في المرة الثانية. وحيث أن الرمتين مستقلتان، إذن فاحتمال هذا الحدث يساوي $(1/3)(2/3)$.
- الحصول على الصورة في المرة الثالثة يعني أننا حصلنا على الكتابة في المرتين الأولى والثانية والصورة في المرة الثالثة. وحيث أن الرميات الثلاثة مستقلة، إذن فاحتمال هذا الحدث يساوي $(1/3)(2/3)^2$... وهكذا.

- احتمال الحصول على الصورة في المرة رقم x يساوي $(1/3)(2/3)^{x-1}$.

مثل هذا التوزيع الاحتمالي يسمى التوزيع الهندسي *geometric distribution*.

يقال أن المتغير العشوائي X يتبع توزيعاً هندسياً بمعلمة p إذا كانت دالته الاحتمالية:

$$f(x) = P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

أي:

$$f(x) = pq^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

ويناسب التوزيع الهندسي حالات مثل الحالات الآتية:

- احتمال إصابة هدف هدفاً ما بعد عدة محاولات باءت بالفشل.
- احتمال ولادة ذكر بعد عدة ولادات كلها أنثى.
- احتمال ظهور وحدة تالفة من عينة بعد فحص عدة وحدات كلها سليمة.

١.٣.٥ خصائص التوزيع الهندسي Properties of the Geometric Distribution

١. الدالة التراكمية للتوزيع الهندسي هي:

$$F(x) = \sum_{k=1}^x pq^{k-1} = p(1 + q + \dots + q^{x-1}) = p \frac{1 - q^x}{1 - q}$$

$$F(x) = 1 - q^x$$

٢. القيمة المتوقعة للتوزيع الهندسي هي:

$$\mu = 1/p$$

$$\sigma^2 = q/p^2$$

٣. تباين التوزيع الهندسي هو:

مثال (١)

يُصَوَّبُ هداف عدة مرات على هدف ما باحتمال إصابة الهدف 0.9 كل مرة. إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد مرات التصويب ليصاب الهدف فأوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

(ب) احتمال إصابة الهدف في المرة الثالثة.

(ج) توقع التوزيع وانحرافه المعياري.

الحل

المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p = 0.9$.

(أ) التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو:

$$f(x) = P(X = x) = (0.9)(0.1)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

(ب) احتمال إصابة الهدف في المرة الثالثة يساوي:

$$f(3) = (0.9)(0.1)^2 = 0.009$$

(ج) توقع التوزيع وانحرافه المعياري هما:

$$\mu = 1/0.9 = 1.11$$

$$\sigma = \sqrt{0.1/(0.9)^2} = \sqrt{1.11} = \sqrt{0.123} = 0.315$$

مثال (٢)

في أسرة معينة وجد أن احتمال أن ترزق سيدة ذكراً يساوي 0.4. أوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالي للمتغير X الذي يمثل عدد مرات الوضع حتى ترزق ذكراً.

(ب) احتمال أن ترزق ذكراً لأول مرة بعد ولادتين كل واحدة منهما أنثى.

الحل

المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $p = 0.4$.

(أ) التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو:

$$f(x) = P(X = x) = (0.4)(0.6)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

(ب) احتمال أن تلد ذكراً في المرة الثالثة:

$$f(3) = (0.4)(0.6)^2 = 0.144$$

٥-٤ التوزيع فوق الهندسي The Hyper-Geometric Distribution

ليكن لدينا صندوق به N من المسامير القلاووظ، وأن منها M مسماراً تالفاً. فإن احتمال أن يكون أى مسمار تالفاً هو $P = M/N$.

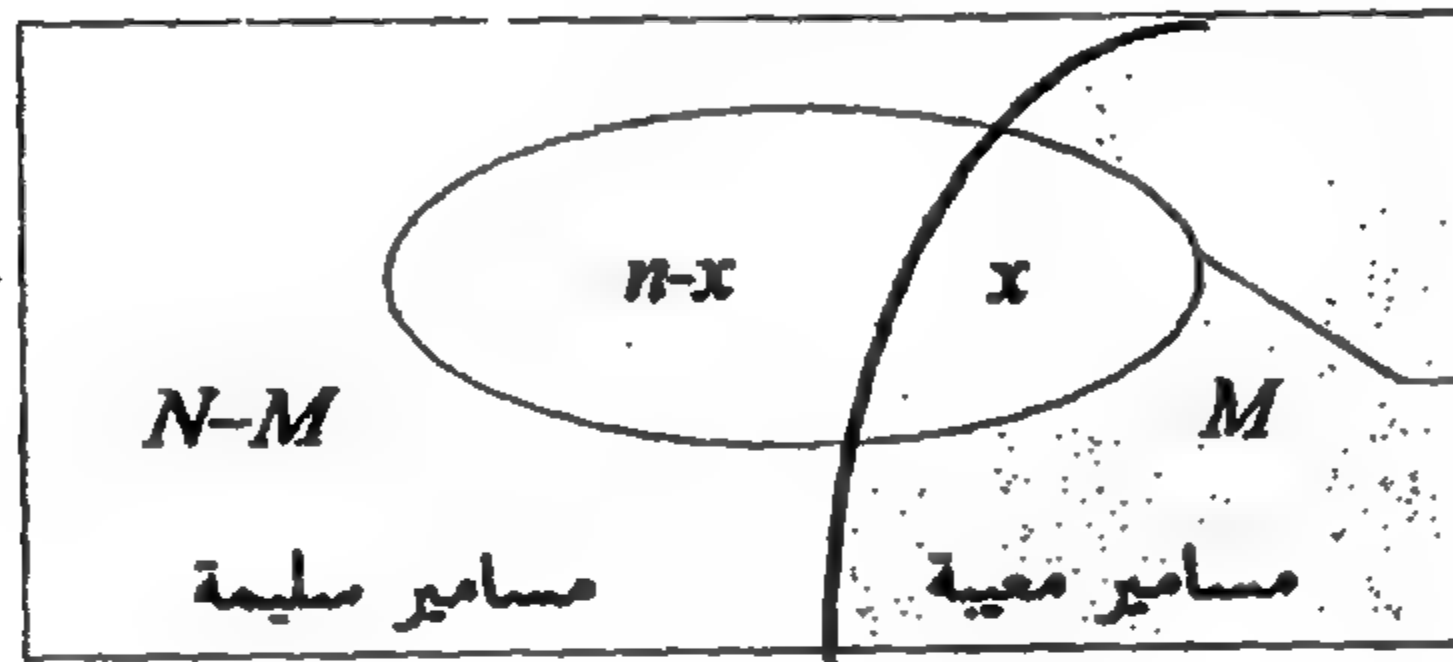
إذا أخذنا عينة من الصندوق حجمها n مع الإحلال [بمعنى أن نسحب مسماراً ونسجل حالته (سليم - تالف) ثم نرجعه إلى الصندوق ثم نسحب مسماراً ثانياً ونسجله ثم نرجعه إلى الصندوق... وهكذا] ، فإن احتمال أن نجد x من المسامير تالفاً يتبع توزيع ذي الحدين ويساوي:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{M}{N}\right)^x \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

حيث يمثل المتغير العشوائى X عدد المسامير التالفة فى العينة.

لنفرض الآن أننا أخذنا عينة من الصندوق حجمها n ولكن بدون إحلال، فإن احتمال أن نجد x من المسامير من تلك العينة تالفاً يساوى:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$



N من المسامير

وبوضع $p = M/N$ فإن التوزيع يصبح:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

يسمى هذا التوزيع بـ التوزيع فوق الهندسى ويُعرّف كالاتى:

لنفرض أننا أمكننا تقسيم مجتمع محدود مكون من N من المفردات إلى قسمين متنافيين حجميهما M ، $N - M$ بحيث تمتلك المفردات التى تنتمى إلى القسم الذى حجمه M خاصية معينة لا تمتلكها المفردات التى تنتمى إلى القسم الذى حجمه $N - M$ ، ولنفرض أننا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من المفردات بدون إحلال من ذلك المجتمع. فإن احتمال أن تحتوى تلك العينة على x مفردة من القسم الذى حجمه M وبالتالى $n - x$ مفردة من القسم الذى حجمه $N - M$ يتبع التوزيع فوق الهندسى بثلاث معالم N ، p ، n :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

مثال (١)

يراد سحب عينات عشوائية كل منها تحتوى على قطعتى غيار السيارات من صندوق يحتوى 10 قطع منها 3 تالفة. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد القطع التالفة فى الحالتين الآتيتين:

(أ) إذا كان السحب مع الإحلال. (ب) إذا كان السحب بدون إحلال.

(أ) إذا كان السحب مع الإحلال فإن المتغير العشوائى يتبع توزيع ذى الحدين بمعلمتين $n = 2$ ، $p = 0.3$. إذن التوزيع الاحتمالى هو:

$$f(x) = b(2, 0.3; x) = \binom{2}{x} (0.3)^x (0.7)^{2-x}, x = 0, 1, 2$$

وفى هذه الحالة فإن:

$$f(0) = \binom{2}{0} (0.3)^0 (0.7)^2 = 0.49$$

$$f(1) = \binom{2}{1} (0.3)^1 (0.7)^1 = 0.42$$

$$f(2) = \binom{2}{2} (0.3)^2 (0.7)^0 = 0.09$$

(ب) إذا كان السحب بدون إحلال فإن المتغير العشوائى يتبع التوزيع فوق الهندسى بثلاث معالم $N = 10$ ، $n = 2$ ، $p = 0.3$. إذن التوزيع الاحتمالى هو:

$$f(x) = \binom{3}{x} \binom{7}{2-x} \div \binom{10}{2}, x = 0, 1, 2$$

وفى هذه الحالة فإن:

$$f(0) = \binom{3}{0} \binom{7}{2} \div \binom{10}{2} = \frac{21}{45} \approx 0.47, \quad f(1) = \binom{3}{1} \binom{7}{1} \div \binom{10}{2} = \frac{21}{45} \approx 0.47$$

$$f(2) = \binom{3}{2} \binom{7}{0} \div \binom{10}{2} = \frac{3}{45} \approx 0.07$$

مثال (٢)

كرتونة تحتوى 20 مصباح كهربى منها اثنان تالفان. سحب ثلاثة مصابيح عشوائيا بدون إحلال. أوجد احتمال أن يكون x منها تالف.

الحل

التوزيع الاحتمالى هنا فوق هندسى بثلاث معالم $N = 20$ ، $n = 3$ ، $p = 0.1$:

$$f(x) = \binom{2}{x} \binom{18}{3-x} \div \binom{20}{3}, x = 0, 1, 2, \dots$$

التوزيع الاحتمالى هنا فوق هندسى بثلاث معالم $N = 20$ ، $n = 3$ ، $p = 0.1$:

$$f(0) = \binom{2}{0} \binom{18}{3} \div \binom{20}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = \frac{17 \times 16}{20 \times 19} \approx 0.72,$$

$$f(1) = \binom{2}{1} \binom{18}{2} \div \binom{20}{3} = \frac{2 \times 18 \times 17}{2 \times 1} \div \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = \frac{612}{2} \cdot \frac{6}{6840} \approx 0.27,$$

$$f(2) = \binom{2}{2} \binom{18}{1} \div \binom{20}{3} = 18 \div \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 18 \cdot \frac{6}{6840} \approx 0.016$$

Expectation and Variance of the Hyper-Geometric Distribution

توقع التوزيع فوق الهندسى هو:

$$\mu = np$$

وتباين التوزيع فوق الهندسى هو:

$$\sigma^2 = npq \frac{N-n}{N-1}$$

تمارين ٥ (أ)

١. لدى مستودع للأجهزة الإلكترونية 7 آلات حاسبة منها آلتان عاطلتان . تسلمت إحدى الجهات 3 آلات عشوائياً من هذا المستودع . أوجد التوزيع الإحتمالى للمتغير X الذى يمثل عدد الآلات العاطلة التى تسلمتها هذه الجهة ثم أوجد التوقع لـ X وكذلك الانحراف المعيارى.

٢. احسب التوقع الرياضى و التباين لمتغير ذى الحدين إذا كان:

$$\mu = 5, \sigma^2 = 15/4 \quad (أ) \quad n=3, p=1/3 \quad (ب)$$

٣. أوجد $E(X^2)$ إذا كان $\sigma^2 = 3, \mu = 5$

٤. احسب كلا من احتمالات ذى الحدين الآتية:

$$(أ) \quad b(7,4;0.2) \quad (ب) \quad b(8,5;0.3)$$

$$(ج) \quad b(15,8;0.8) \quad (د) \quad b(8,5;0.7)$$

$$(هـ) \quad b(15,10;1/2) \quad (و) \quad b(12,6;0.9)$$

$$(ز) \quad b(15,3;0.3) + b(15,2;0.3) + b(15,1;0.3) + b(15,0;0.3)$$

$$(ح) \quad b(8,6;0.4) + b(8,7;0.4) + b(8,8;0.4)$$

٥. أوجد احتمال النجاح في 8 مرات بالضبط من 15 محاولة إذا كان احتمال النجا يساوى 0.75.
٦. أوجد احتمال النجاح في 5 مرات على الأقل من 8 محاولات إذا كان احتمال النجا يساوى 0.3.
٧. أوجد احتمال النجاح في 3 مرات على الأكثر من 7 محاولات إذا كان احتمال الفش يساوى 0.2.
٨. إذا ألقى زوج من الزهر 7 مرات، أوجد احتمال الحصول على مجموع 11 ثلار مرات بالضبط.
٩. عائلة لها 6 أطفال. ما هو احتمال أن يكون لها 3 من البنين ، 3 من البنات؟
١٠. عائلة لها 7 أطفال. ما هو احتمال أن يكون لهذه العائلة:
- (أ) 4 من البنات (ب) اثنان على الأقل.
- (ج) اثنان على الأقل ، 4 من البنات على الأكثر؟
١١. إذا كان احتمال إصابة قناص لهدف 0.3 ، وإذا صوب هذا القناص نحو الهدف خمس مرات متتالية وعرفنا المتغير العشوائى X بأنه عدد مرات الإصابة فأوجد:
- (أ) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X . (ب) توقع وتباين X .
- (ج) احتمال أن يصيب القناص الهدف مرة واحدة على الأكثر.
١٢. أطلق قناص 10 رصاصات على هدف ما. فإذا كان احتمال إصابة الهدف في كل مرة يساوى $2/3$ ، فما احتمال أن يصيب الهداف الهدف مرتين على الأقل؟
١٣. لوحظ في إحدى الألعاب الرياضية التى نتیجتها إما فوز أو خسارة أن احتمال فوز لاعب ما ثابت في أى مباراة ويساوى 0.6 فإن علم أن هذا اللاعب سوف يلعب 5 مباريات مع أشخاص مختلفين خلال الموسم القادم وكان المتغير العشوائى X يمثل عدد

مرات الفوز أوجد :

(أ) الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

(ب) احتمال أن يفوز بأربع مباريات على الأكثر.

(ج) احتمال أن يخسر مباريتين على الأكثر.

١٤. رميت قطعة نقود سوية ثلاث مرات. أوجد التوزيع الإحتمالي لظهور H .

١٥. إمتحان مكون من 15 سؤال من النوع (صواب — خطأ). ما هو احتمال أن يحصل

طالب يجب عشوائيا أن يحصل على 10 إجابات صحيحة على الأقل؟ إذا قدر طالب

آخر لنفسه احتمالا قدره 0.8 للإجابة الصحيحة على أى سؤال، فما هو احتمال أن

يجيب 12 إجابة صحيحة؟

تمرين ٥ (ب)

١. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع بواسون وكان $P(X=0) = 0.3$ فاحسب

$P(X > 3)$.

٢. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 3$ فأوجد $f(5)$.

٣. إذا كان متوسط عدد الحوادث الأسبوعية على الطريق الصحراوي يساوي 4 فما

احتمال أن يقع في أحد الأسابيع:

(أ) ثلاثة حوادث (ب) حادتين على الأكثر

٤. تبين سجلات الأرصاد لإحدى المدن أن متوسط نزول الثلج في شهر نوفمبر هو

ثلاثة أيام. استخدم توزيع بواسون لإيجاد احتمال أن يتزل الثلج أربعة أيام على

الأكثر في نوفمبر العام القادم.

٥. في خلال وقت محدد يتوافد المسافرون على شبك التذاكر في إحدى محطات القطار

بمعدل قدره مسافر واحد كل دقيقتين. ما هو احتمال ألا يتوافد أحد خلال دقيقة

واحدة؟ وما هو احتمال أن يتوافد مسافران على الأقل خلال دقيقة واحدة؟

٦. ماكينة تنتج قطع غيار حسب مواصفات معينة. فإذا كان احتمال عدم مطابقة أى قطعة للمواصفات يساوى 0.05، فما هو احتمال أن يكون من بين عينة من 50 قطعة قطعتان أو أكثر غير مطابقة للمواصفات؟

[قارن بين استخدام توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون]

٧. وجد أن متوسط عدد الإعصارات المدمر التى تصيب منطقة معينة فى الولايات المتحدة الأمريكية يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 7$. أوجد:
- (أ) احتمال أن يصيب المنطقة أقل من خمسة إعصارات.
- (ب) احتمال أن يصيب المنطقة ليس أكثر من سبعة إعصارات.

٨. مزرعة دواجن بها 10,000 دجاجة. فإذا كان احتمال أن تموت أى منها يساوى 0.0005 فما احتمال أن تموت أكثر من 10 دجاجات؟

٩. إذا كان 3% من المصابيح الكهربائية المنتجة فى مصنع ما تالفة فاوجد احتمال أن يظهر فى عينة من 100 مصباح:

(أ) ثلاثة تالفين (ب) أقل من خمسة تالفين

تمرين ٥ (ج)

١. إذا كان احتمال أن يصيب صائد هدفا ما يساوى 0.6 أوجد احتمال أن يصيب الهدف بعد أربعة مرات كلها فاشلة.

٢. إذا كان احتمال أن يفوز لاعب فى كرة الطاولة أمام لاعب معين يساوى 0.7، فما هو احتمال أن يفوز بعد ثلاث مباريات كلها انتهت بعدم الفوز؟ ما احتمال أن يفوز قبل المرة الثالثة؟

٣. إذا كان احتمال أن ولادة أرنب ذكر فى أى ولادة لأثنى أرنب يساوى 0.4

فأوجد:

- (أ) التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الولادة قبل أن تلد الأرنبة ذكرا.
 - (ب) متوسط عدد مرات الولادة قبل أن ترزق بأول ذكر.
 - (ج) احتمال أن تضع ذكرا لأول مرة بعد ولادتين على الأكثر.
٤. ررض أن صندوقا يحتوى 100 شريط كاسيت به 5 أشرطة تالفة. إذا أخذنا عينة من 10 أشرطة، فما هو احتمال أن نجد بها x أشرطة تالفة.

تمرين ٥ (د)

١. لنفرض أن صندوقا يحتوى 100 شريط كاسيت به 5 أشرطة تالفة. إذا أخذنا عينة من 10 أشرطة، فما هو احتمال أن نجد بها x أشرطة تالفة.
٢. لنفرض أننا اخترنا خمس ورقات كوتيشينة عادية بدون إحلال. أوجد احتمال أن يكون منها اثنين حمر (قلوب ، كاروه).
٣. كرتونة تحتوى على 24 مصباح كهربائى منها 3 تالفة. إذا سحبت عينة عشوائيا من 6 مصابيح من الصندوق فما احتمال أن نجد منها x تالفة.
٤. صندوق يحتوى 5 كرات حمراء ، 10 كرات زرقاء. إذا أخذنا 7 كرات عشوائيا من الصندوق وكان المتغير العشوائى X يمثل نسبة عدد الكرات الحمر فى العينة فأوجد المتوسط والتباين للمتغير X .
٥. إذا كانت شحنة من الأجهزة الإلكترونية تحتوى 3 أجهزة معيبة ، 12 سليمة واختيرت عينة عشوائية من 5 أجهزة فما هو احتمال أن يوجد بها على الأكثر جهازان معيبان؟

٦. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا فوق هندسى بمعلمات 8 ، 20 ، n فأوجد قيمة n التى تجعل $Var(X)$ أكبر ما يمكن.

٧. دفعة من 100 رقيقة كمبيوتر تحتوي 10 رقائق معيبة. إذا اخترنا 5 رقائق عشوائيا أوجد:

(أ) دالة الكثافة الاحتمالية لعدد الرقائق المعيبة في العينة.

(ب) المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الرقائق المعيبة.

(ج) احتمال أن تحتوي العينة رقيقة واحدة معيبة على الأقل.

٨. جمعية من خمسين عضوا منها 20 رجلا ، 30 سيدة. اختيرت عشوائيا لجنة من 10 أعضاء. إذا كان X هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيدات في اللجنة فأوجد:

(أ) متوسط وتباين X .

(ب) متوسط وتباين عدد الرجال في اللجنة.

(ج) احتمال أن تكون اللجنة جميعها من جنس واحد.

٩. بركة صغيرة بها 1000 سمكة منها 100 مُعلّمة. اصطيديت 20 سمكة من البركة:

(أ) احسب احتمال أن تكون سمكتان على الأقل من العينة مُعلّمة.

(ب) أوجد تقريب ذي الحدين للاحتمال في (أ).

(ج) أوجد الخطأ النسبي للتقريب (ب).

١٠. في استطلاع للرأى وجد أن 40% من الناخبين المسجلين في دائرة انتخابية

يفضلون المرشح أ. إذا اختير 10 ناخبين عشوائيا فأوجد احتمال أن نجد منهم

5 على الأقل يفضلون المرشح أ.

١١. أثبت أن المتوسط والتباين للتوزيع فوق الهندسى يؤول إلى التوزيع ذي الدين

عندما $N \rightarrow \infty$.

الدرس السادس المتغير العشوائى المتصل

Continuous Random Variable

١- مقدمة

علمنا أن المتغير العشوائى يكون متصلا *continuous* إذا كان مداه فترة حقيقية (مغلقة أو مفتوحة) أى مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية، وكل فترة جزئية من المدى يرافقها احتمال لوجود المتغير العشوائى داخلها. والآن سنعطى بعض التعريفات والاستنتاجات:

٢- دالة الكثافة الاحتمالية *Probability Density Function*

الدالة f التى تعبر عن العلاقة بين متغير عشوائى متصل X واحتماله تسمى دالة الكثافة الاحتمالية *Probability Density Function*. هذه الدالة تبين لنا كيف يتوزع الاحتمال الكلى على الأجزاء المختلفة لمدى المتغير العشوائى X .

مثال

لنفرض أن توزيع الأعمار فى دولة من الدول يتبع التوزيع الآتى:

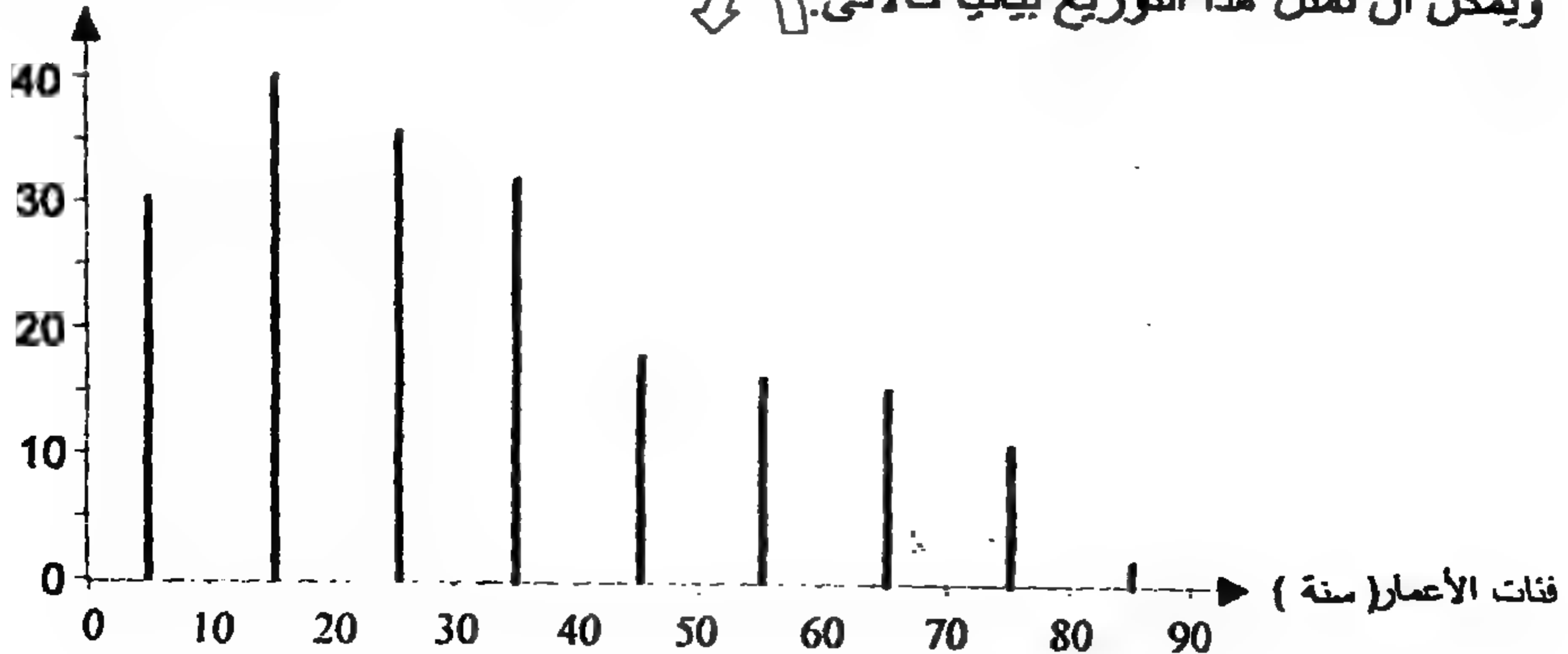
فترات الأعمار	0 -	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -
التعداد (10^6)	30	40	37	33	17	15	13	12	3

إذا أخذنا مراكز الفترات فإبتنا نحصل على الجدول الآتى :

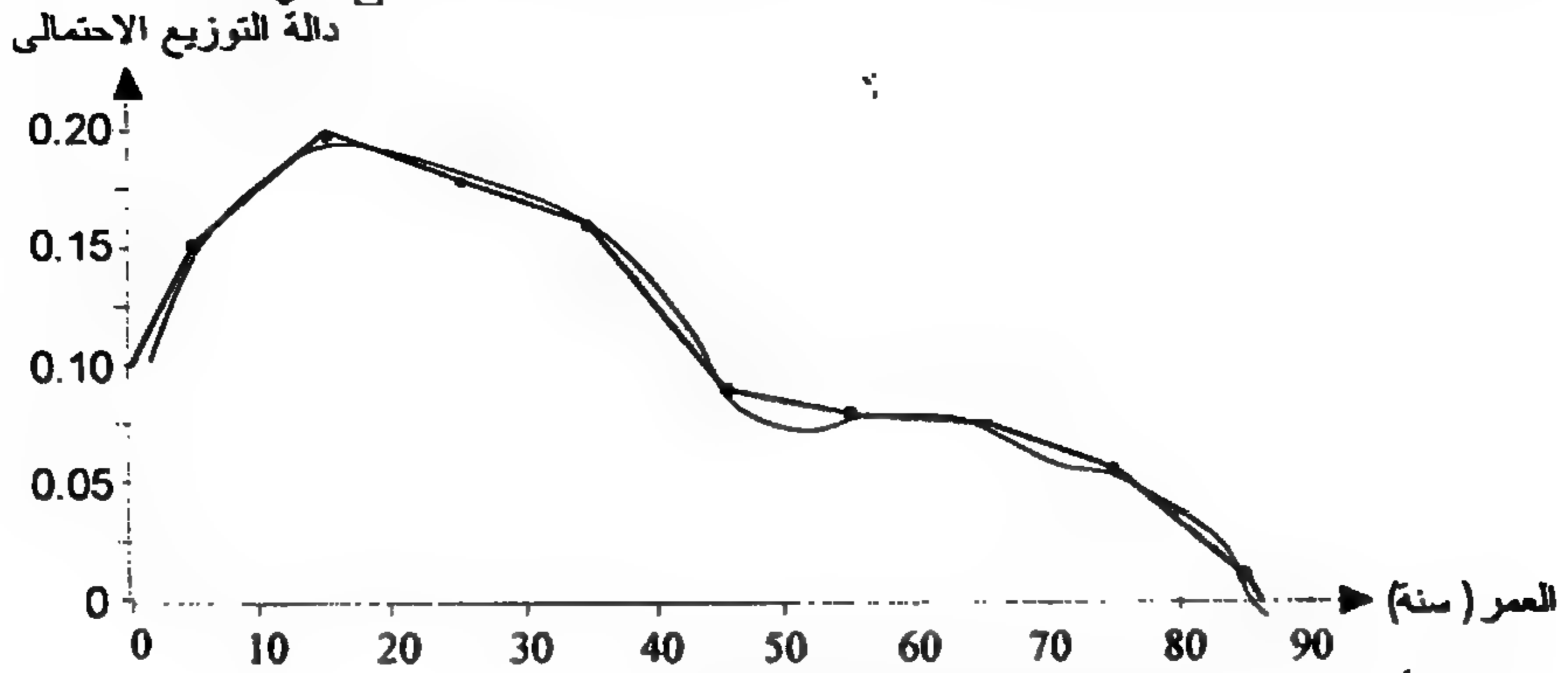
فترات الأعمار	5	15	25	35	45	55	65	75	85
التعداد (10^6)	30	40	37	33	17	15	13	12	3

التعداد (مليون نسمة)

ويمكن أن نمثل هذا التوزيع بيانيا كالتالى:

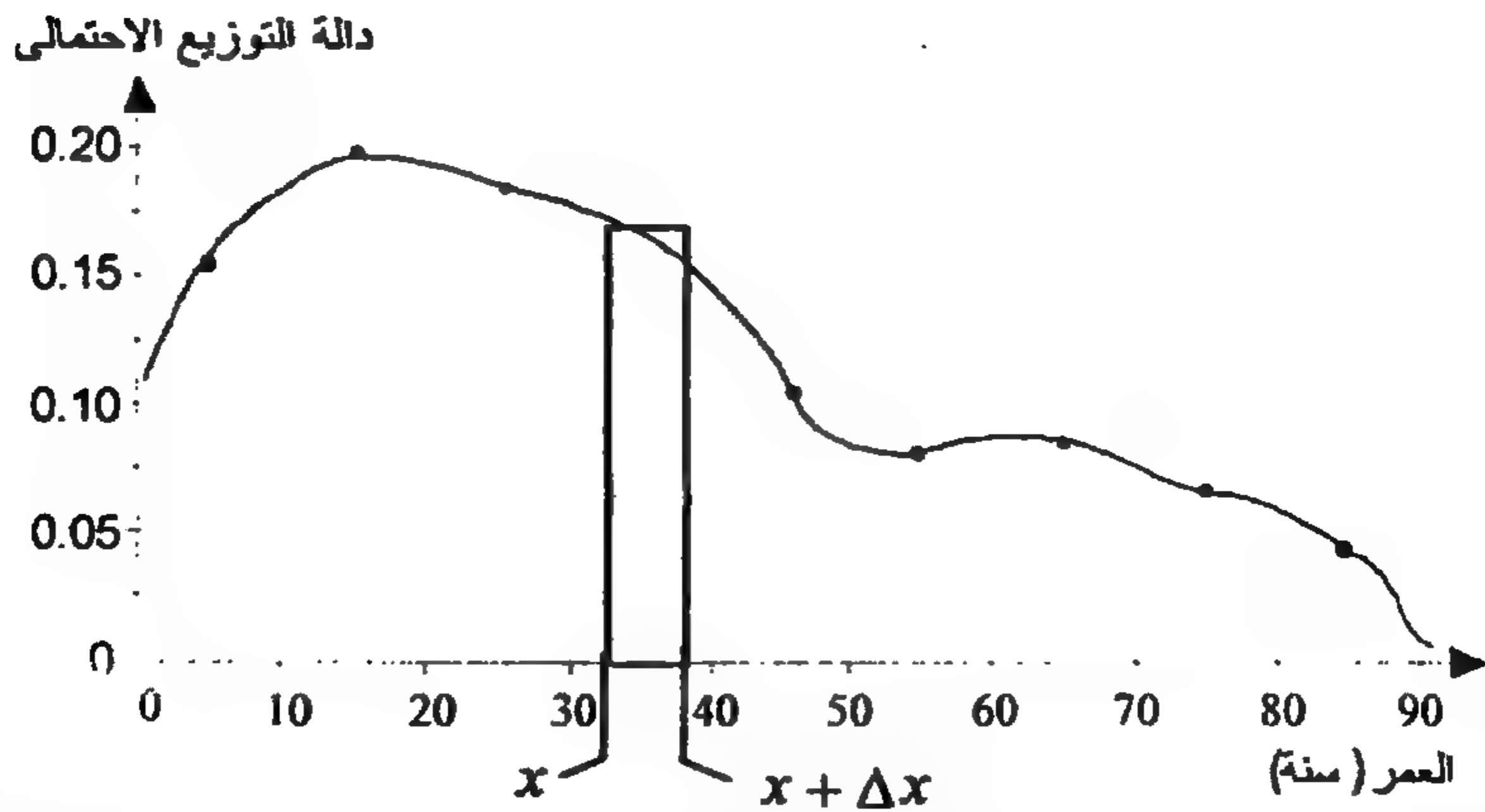


من الشكل، حيث أن هناك 40 مليون نسمة في فترة الأعمار - 10 ، وحيث أن التعداد الكلي يساوي 200 مليون نسمة، فإن احتمال أن يكون أي شخص في تلك الفترة من العمر يساوي $200 \div 40 = 0.20$. ويمكن أن نمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعبر عن فترة العمر كالآتي:



ويمكن أن نستبدل المضلع بمنحنى كالآتي:

إذا فرضنا أن المنحنى يمثل دالة $f(x)$ فإن احتمال أن يكون شخص ما في فترة العمر x إلى أقل من $x + \Delta x$ يساوي $f(x) \Delta x$ تقريبا ويمثل مساحة المستطيل الذي عرضه Δx وطوله $f(x)$.



نستطيع أن نحصل على احتمالات بقية الفترات بحساب مساحات المستطيلات المناظرة وبذلك يكون الاحتمال الكلي يساوي تقريبا مجموع مساحات المستطيلات. أي تساوي:

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

هذا، ويعين قياس Δx مدى دقة قيمة الاحتمال؛ فكلما صغرت Δx اقترب احتمال وجود شخص في فترة العمر $[a, b]$ من المساحة تحت المنحنى وفوق تلك الفترة. أي:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

نستطيع الآن أن نعطي التعريف الآتي:

احتمال أن يكون ناتج تجربة عشوائية ممثلاً بمتغير عشوائي X بين a ، b هو:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

حيث $f(x)$ يمثل قيمة دالة الكثافة الاحتمالية.

ونستطيع الآن أن نقرر الآتي:

يفرض أن المتغير العشوائي المتصل X يتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً دالة كثافته الاحتمالية f إذا كانت f تحقق الشرطين الآتيين:

$$1. \quad f(x) \geq 0 \text{ لجميع قيم } x \text{ التي يأخذها المتغير العشوائي } X.$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

ويجب أن نذكر أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة مفردة يساوي صفراً حيث أن تلك القيمة المفردة موجودة على فترة طولها صفر. كذلك فإن الصيغة التي أعطيناها لاحتمال وقوع X بين a ، b لا تتوقف على كون a ، b ينتميان أو لا ينتميان للفترة.

مثال

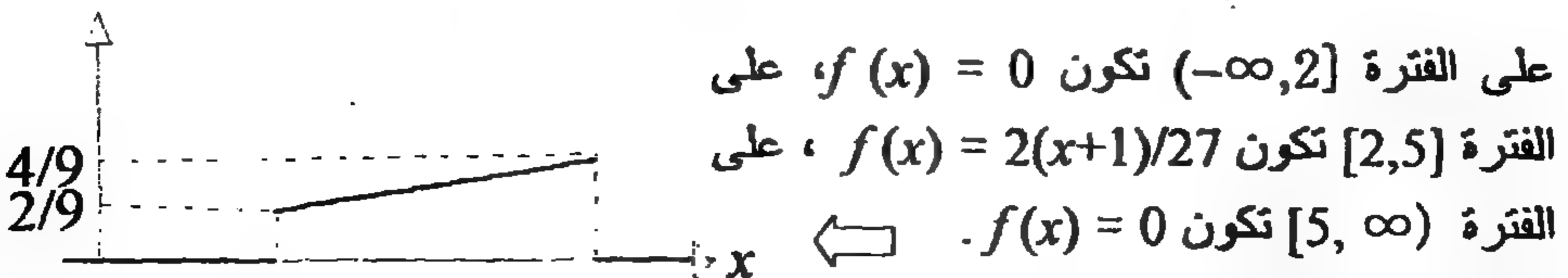
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(1+x)}{27} , & 2 \leq x \leq 5 \\ 0 , & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أثبت أن الدالة:

تمثل دالة كثافة احتمالية على R وأوجد كلا من $P(X \leq 4)$ ، $P(4 \leq X \leq 5)$.

الحل

من التعريف نجد أن دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ مُعرَّفة على ثلاث فترات حقيقية: $(-\infty, 2]$ ، $[2, 5]$ ، $(5, \infty)$ كالآتي:



الدالة غير سالبة والمساحة تحت المنحنى هي:

$$\frac{3}{2} \left[\frac{2}{9} + \frac{4}{9} \right] = 1$$

$$P(x < 4) = \int_2^4 \frac{2}{27} \cdot (1+x) dx = \frac{2}{27} \cdot \frac{25-9}{2} = \frac{16}{27} , \quad P(3 \leq x \leq 4) = 1/3$$

٣- دالة التوزيع التراكمية Cumulative Density Function

ليكن X متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافته الاحتمالية هي f . تعرف دالة التوزيع التراكمية F لهذا المتغير العشوائى كالآتى:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

٣-١ خواص دالة التوزيع التراكمية

◆ F غير تناقصية.

$$F(\infty) = 1, \quad F(-\infty) = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

مثال (١)

أوجد دالة التوزيع التراكمية لدالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{27}(x+1) & 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الحل

دالة التوزيع التراكمية F سيكون لها تعريف على الثلاث فترات كالآتى:

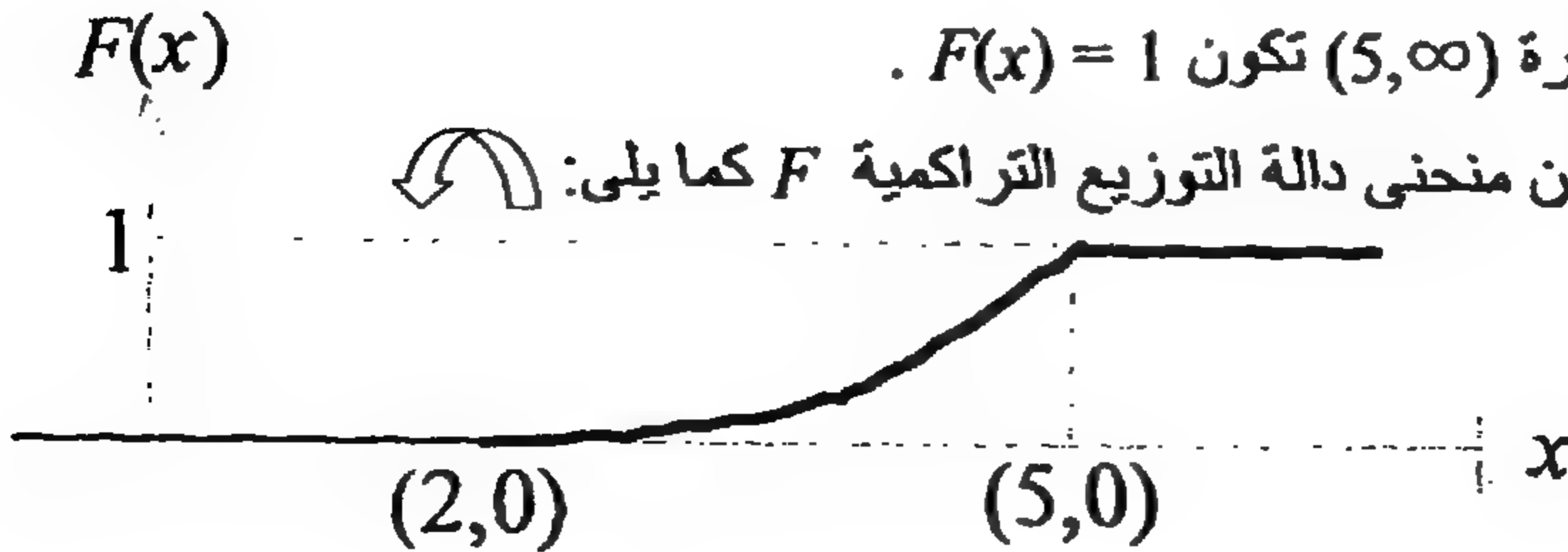
على الفترة $(-\infty, 2)$ تكون $F(x) = 0$,

وعلى الفترة $[2, 5]$ تكون $f(x) = \int_2^x \frac{2}{27}(t+1)dt = \frac{1}{27}[(1+t)^2]_2^x$ أى تكون

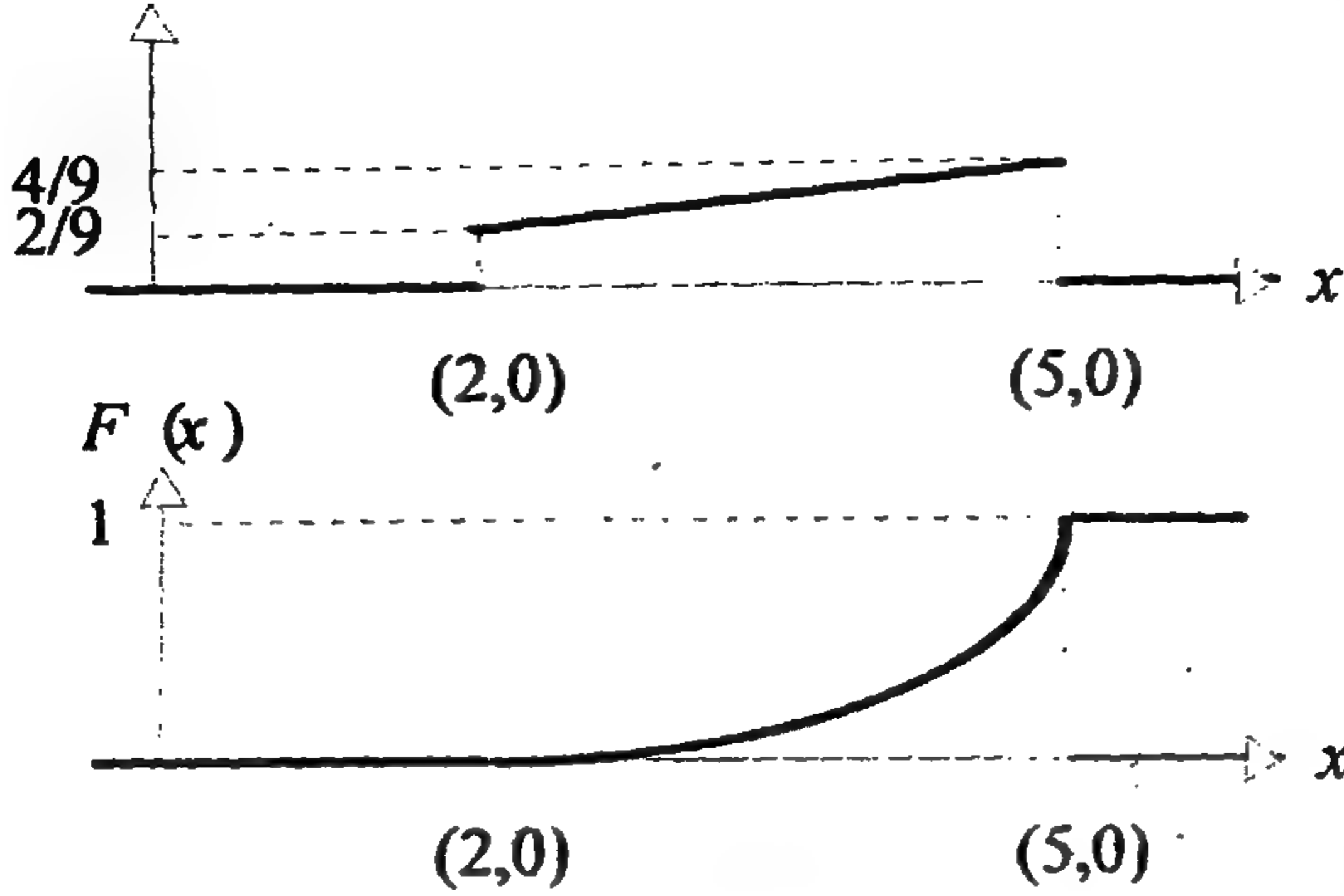
$$F(x) = \frac{1}{27}(1+x)^2 - \frac{9}{27}$$

وعلى الفترة $(5, \infty)$ تكون $F(x) = 1$.

وبذلك يكون منحنى دالة التوزيع التراكمية F كما يلى:



والشكل الآتي يمثل منحنى $f(x)$ ، $F(x)$ في رسم واحد:



مثال (٢)

إذا كانت دالة التوزيع التراكمية لأعمار الأقراص الصلبة التي ينتجها أحد المصانع (بالسنوات) هي:

$$F(x) = 1 - e^{-3x}, \quad x \geq 0$$

فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يعبر عن عمر القرص.

وإذا اشترى شخص قرصاً صلباً من إنتاج هذا المصنع، فما هو احتمال أن يعيش القرص:

- (أ) أقل من سنتين؟
- (ب) بين سنتين وأربع سنوات؟
- (ج) أكثر من أربع سنوات؟

الحل

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = 3e^{-3x}, \quad x \geq 0$$

(أ) احتمال أن يعيش القرص أقل من سنتين هو:

$$F(2) = 1 - e^{-6}$$

(ب) احتمال أن يعيش القرص بين سنتين وأربع سنوات هو:

$$P(2 \leq x \leq 4) = F(4) - F(2) = 1 - e^{-12} - (1 - e^{-6}) = e^{-6} - e^{-12}$$

(ب) احتمال أن يعيش القرص أكثر من أربع سنوات هو:

$$P(x \geq 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-12}) = e^{-12}$$

٤- القيمة المتوقعة لتوزيع احتمالي متصل

Expectation Value of a Continuous Probability Distribution

تُعرّف القيمة المتوقعة (التوقع) $E(X)$ لتوزيع احتمالي متصل ذي دالة كثافة احتمالية f كالآتي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

ويُفسر التوقع على أنه متوسط القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X إذا كررنا التجربة التي يعبر عنها هذا المتغير عدداً لا نهائياً من المرات ويرمز له بالرمز μ . أي أن:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

مثال

أوجد المتوسط للمتغير العشوائي المتصل X إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{3}{250} (10x - x^2), x \in [0, 5]$$

الحل

$$\mu = \frac{3}{250} \int_0^5 x (10x - x^2) dx = \frac{3}{250} \left[\frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^5 = \frac{3}{250} \left[\frac{250}{3} - \frac{625}{4} \right] = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

٥- التباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي متصل

Variance and Standard Deviation of a Continuous Probability Distribution

يُعرّف التباين $V(X) = \sigma^2$ لتوزيع احتمالي متصل ذي دالة كثافة احتمالية f كالآتي:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

أما الانحراف المعياري فهو:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

نظرية

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

البرهان

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

مثال

أوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتصل X الذي دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \frac{3}{250} (10x - x^2), x \in [0,5]$$

الحل

في مثال سابق وجدنا أن التوقع لهذا المتغير هو:

$$\mu = E(x) = \frac{3}{8}$$

إذن:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{3}{250} \int_0^5 x^2 (10x - x^2) dx - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{250} \left[\frac{10x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^5 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\ &= \frac{3}{250} \left[\frac{6250}{4} - \frac{3125}{5} \right] - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{250} \times \frac{52310 - 12500}{20} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\ &= \frac{3}{250} \times 199.5 - 0.140625 = 2.388 - 0.141 = 2.247 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{2.247} = 1.5$$

تمرين ٦

١. إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(X) = \begin{cases} aX & , 0 \leq X < 1 \\ a & , 1 \leq X \leq 2 \\ -aX + 3a & , 2 \leq X \leq 3 \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد قيمة a ، دالة التوزيع التراكمية.

٢. إذا كان قطر سلك كهربائي x تنتجه إحدى الشركات يتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً دالة كثافته

الاحتمالية هي $f(x) = \frac{10}{3} x^3 (2 - x)$ فتتحقق من أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية

وأوجد دالة التوزيع التراكمية. أوجد أيضاً $P(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3})$.

٣. سلعة كهربائية عمرها X يتبع توزيع احتمالي دالة كثافته الاحتمالية $f(x) = \frac{k}{x^n}$.

(أ) أوجد قيمة k إذا كان $n = 2$ (ب) أوجد قيمة k إذا كان $n = 3$

(ج) ما احتمال أن ينتهي عمر السلعة قبل 5000 ساعة.

٤. إذا كان x متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f(x) = c \cdot x^3(1-x)$; $0 \leq x \leq 1$ فأوجد قيمة c ، $P(x > 1/2)$.

٥. أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{8}x$, $0 \leq x \leq 4$ هي دالة كثافة احتمالية.

وإذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافته $f(x)$ أوجد $P(X \leq 1)$ ، $P(1 \leq X \leq 3)$

٦. أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{2}{9}x$, $0 \leq x \leq 3$ ، صفر فيما عدا ذلك هي دالة كثافة احتمالية.

واحسب قيمة احتمال أن يقع المتغير العشوائي داخل الفترة $[2, 2.5]$.

٧. أوجد القيمة المتوقعة μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائي المتصل X الذي دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & , 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ثم استنتج احتمال وجود X داخل الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

٨. يتم إمداد محطة بترين بالبترول صباح السبت من كل أسبوع. فإذا كانت كمية البترول مقدرة

بآلاف اللترات هي متغير عشوائي متصل دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} kx(C - 2x) & , 0.5 \leq x \leq 1.5 \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد k ، c إذا علمت أن متوسط الإمداد الأسبوعي يساوي 90,000 لتر.

٩. أوجد القيمة المتوقعة μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائي المتصل X الذي دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & , 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١٠. إذا كانت أعمار المصابيح التي تنتجها إحدى المصانع تتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً دالة كثافته

الاحتمالية هي $f(x) = \frac{8}{3}x^2e^{-2x}$, $x \geq 0$ حيث x هي عمر المصباح بالشهور، فأوجد

متوسط عمر المصباح وانحرافه المعياري.

الدرس السابع

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائى المتصل

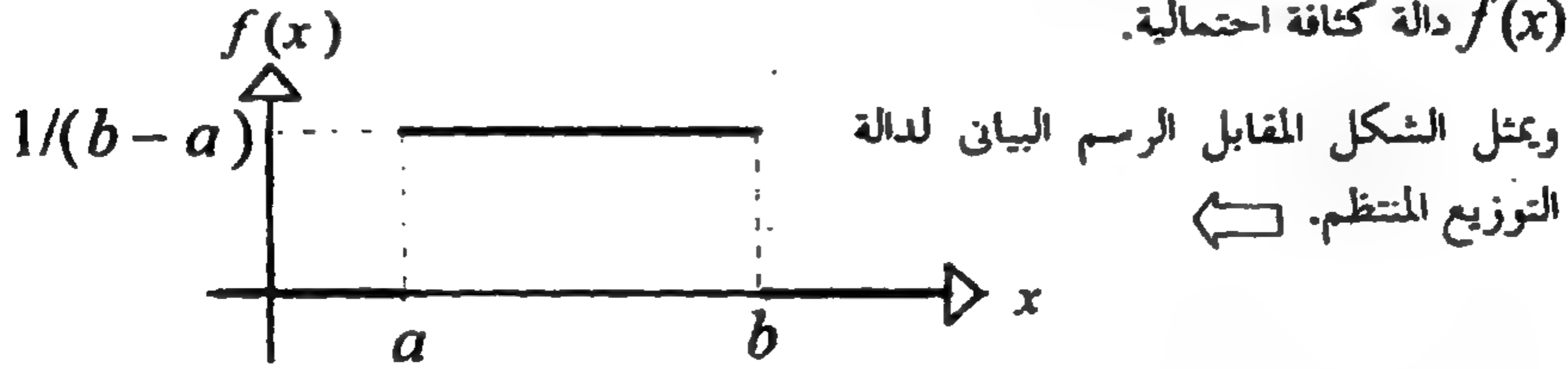
Some Probability Distributions of a Continuous Random Variable

١- التوزيع المنتظم (المستطيل) Uniform (Rectangular) Distribution

يقال أن المتغير العشوائى المتصل X يتبع توزيعا منتظما على الفترة $[a, b]$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

من الواضح أن $f(x) \geq 0$ وأن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ، وبذلك نكون قد تحققنا من أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

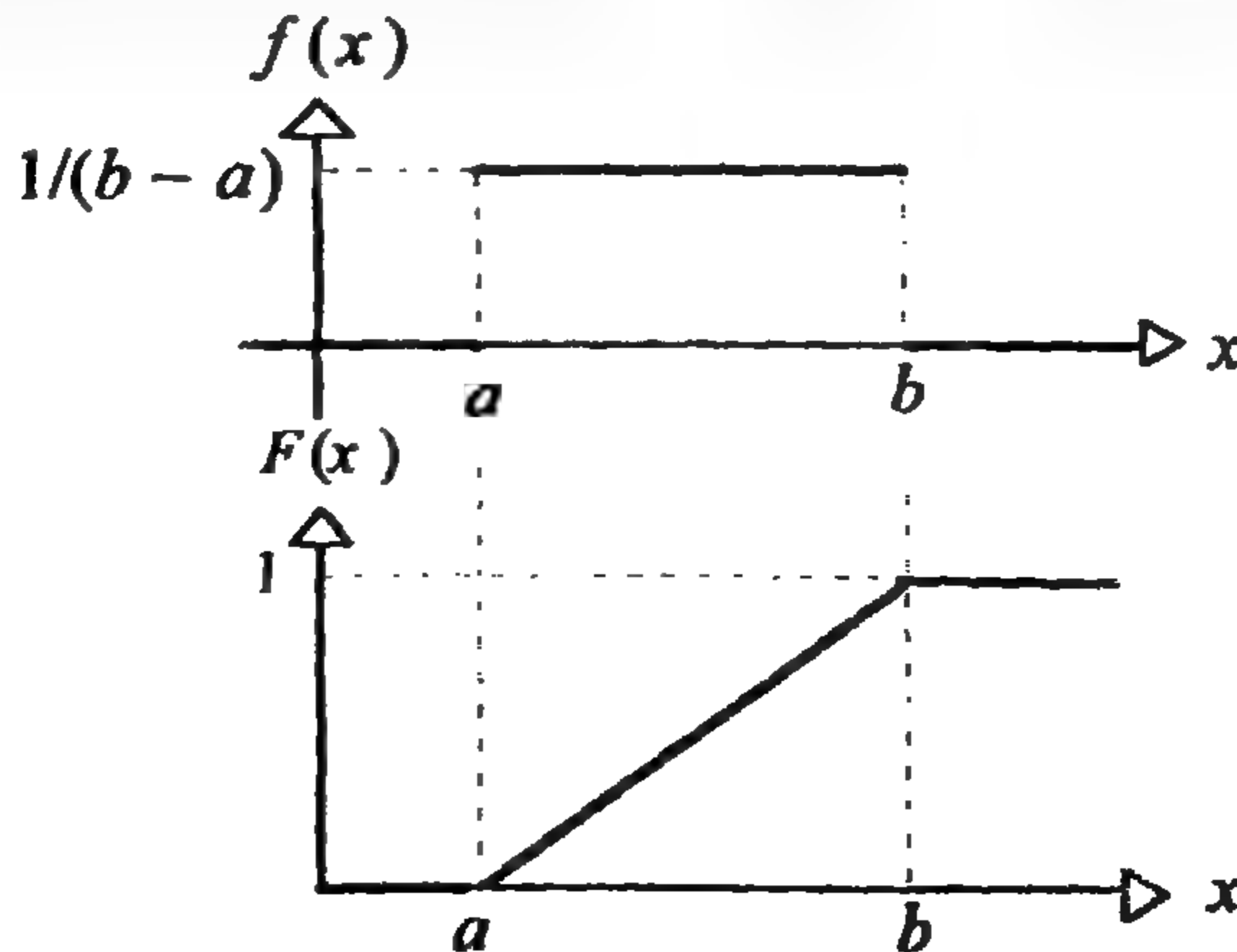


١-١ خواص التوزيع المنتظم

◆ دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المنتظم هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x > b \end{cases}$$

ويمثل الشكل الآتى الرسم البيانى لدالة التوزيع المنتظم ودالته التراكمية. \curvearrowright



متوسط التوزيع هو:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{2}(a + b)$$

تباين التوزيع هو:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2$$

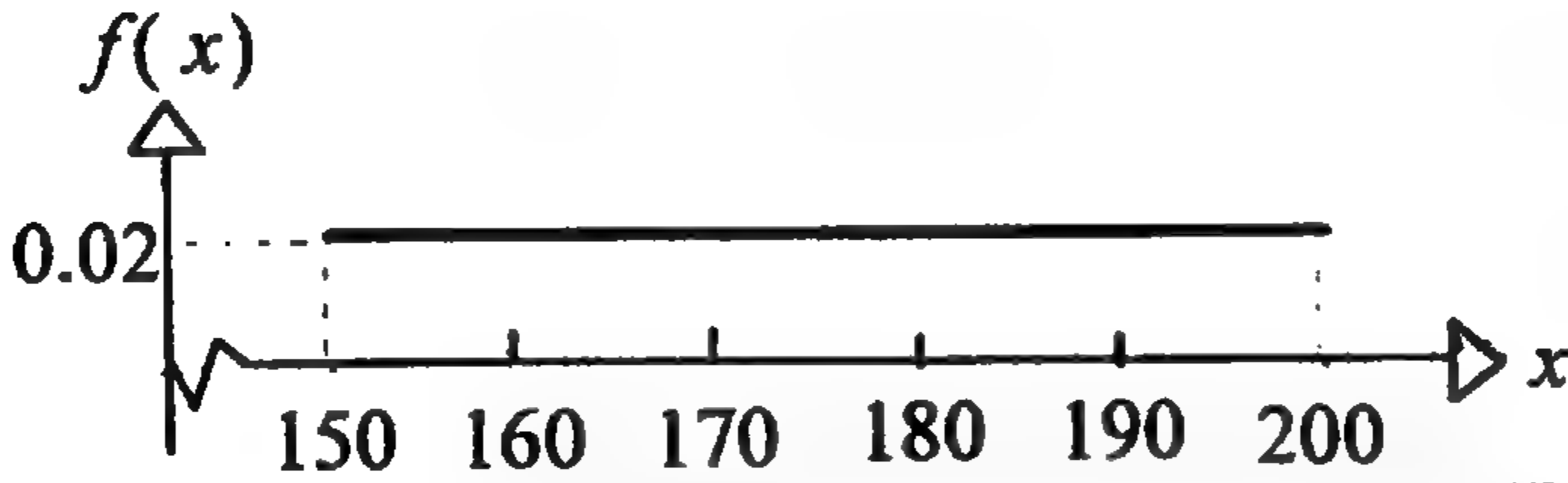
هذا؛ والتوزيع المنتظم هو أبسط توزيع احتمالي متصل ويستخدم عادة كنموذج في الحالات التي تكون فيها الأحداث متساوية الاحتمال؛ فمثلا الخطأ (بالزيادة أو النقصان) الذي يحدث عند تسجيل القياسات ، حساب احتمال زمن الانتظار وغيرها. والأمثلة الآتية توضح بعض استخدامات هذا التوزيع:

مثال (١)

لنفرض أن قسم البحوث في مصنع للصلب لديه اعتقاد بأن إحدى ماكينات فرد الصلب تنتج ألواح ذات سمك متغير يتراوح بين 150 ، 200 ملليمتر. فإذا كانت الألواح التي سمكها أقل من 160 ملليمتر مرفوضة فاحسب نسبة الألواح المرفوضة.

الحل

نستخدم التوزيع المنتظم حيث $a = 150$ ، $b = 200$ ، $\frac{1}{b-a} = 0.02$



من الشكل يتضح أن نسبة الألواح المرفوضة هي 20% .

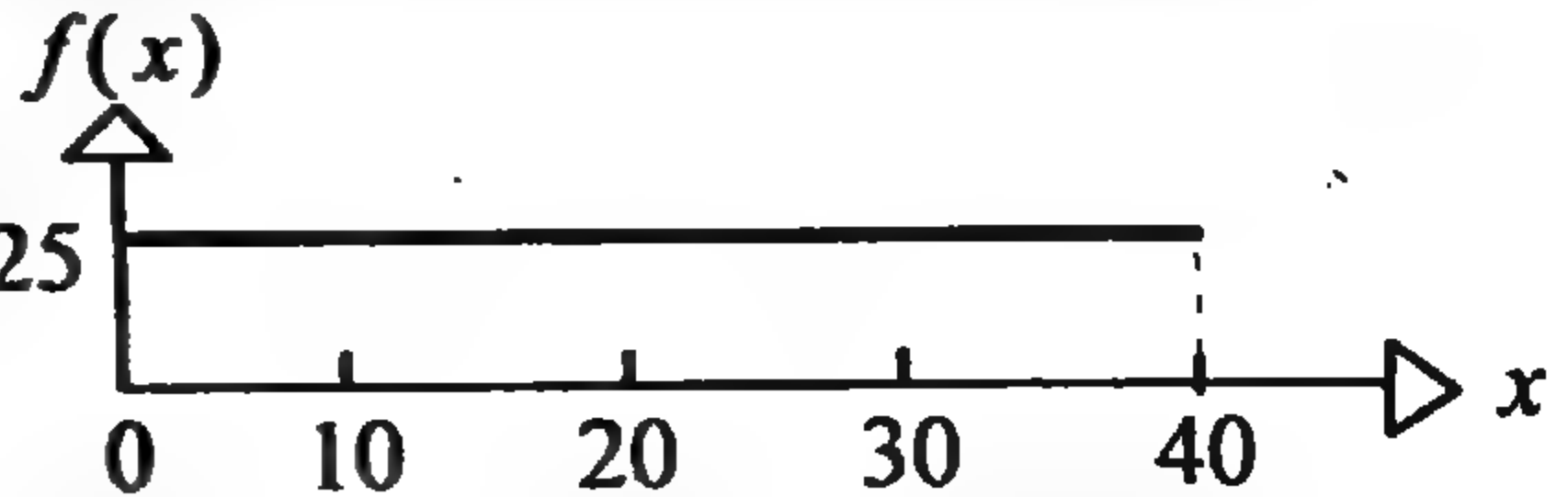
مثال (٢)

وصل مسافر إلى محطة قطارات زمن التقاطر فيها ثابت ويساوي 40 دقيقة. ما هو احتمال أن ينتظر المسافر على الأقل 10 دقائق؟

الحل

زمن انتظار المسافر يتبع التوزيع المنتظم الذي دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \frac{1}{40}, 0 \leq x \leq 40$$



$$T = (40 - 10) \times 0.025 = 0.75$$

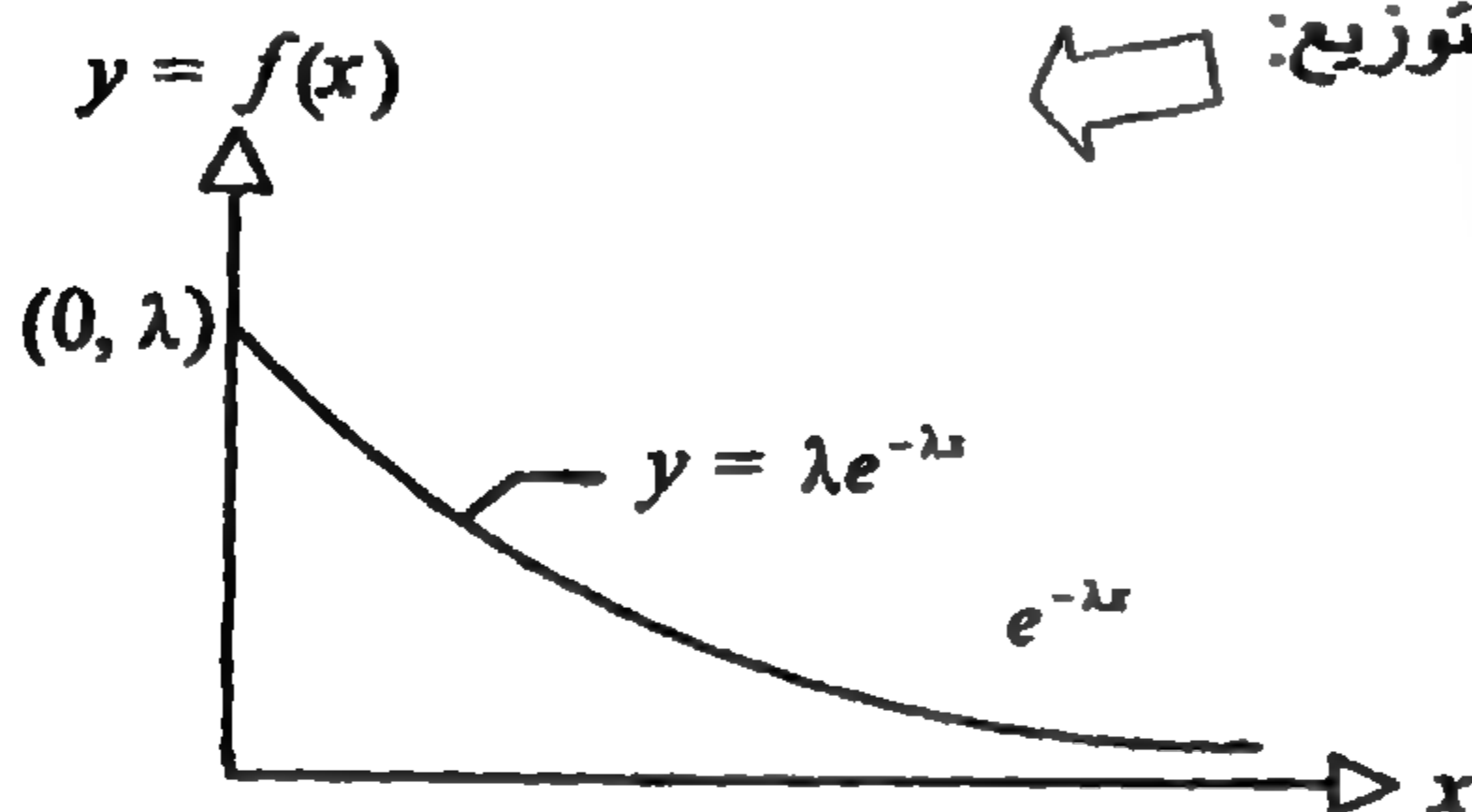
من الشكل يتضح أن احتمال أن ينتظر المسافر على الأقل 10 دقائق هو:

٢- التوزيع الأسى Exponential Distribution

يقال أن المتغير العشوائى المتصل X يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda > 0$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

وبين الشكل الآتى الرسم البيانى للتوزيع:



والآن فإن هذه الدالة تحقق:

١.	جميع قيم x :	$\lambda e^{-\lambda x} > 0$
٢.		$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx$ $= \lim_{b \rightarrow \infty} \lambda \cdot \left. \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right _0^b = -\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\lambda b} + 1 = 1$

١-٢ خصائص التوزيع الأسى

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الأسى هي:</p> </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\mu = 1/\lambda$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>متوسط التوزيع الأسى هو:</p> </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>تباين التوزيع الأسى هو:</p> </div>

هذا؛ ويستخدم التوزيع الأسى فى حالات الانتظار بين الأحداث المتتالية حيث تمثل المعلمة λ متوسط عدد مرات الوصول فى وحدة الوقت، وتوضح ذلك الأمثلة الآتية:

مثال (١)

يتبع وصول الطائرات فى مطار ما نمونجا مشابه لدالة الكثافة الاحتمالية الأسية بمتوسط 15 طائرة فى الساعة. أوجد احتمال وصول طائرة فى 6 دقائق.

الحل

$$P(t \leq 0.1) = \int_0^{0.1} 15 e^{-15t} dt = 0.777$$

مثال (٢)

إذا كانت أعمار البطاريات التى تنتجها إحدى الشركات تتبع توزيعا احتماليا أسيا متوسطه 2000 ساعة فأوجد:

- (أ) احتمال أن ينتهى عمر البطارية خلال 200 ساعة من الاستعمال.
(ب) احتمال أن تعيش البطارية أكثر من 4,000 ساعة.

الحل

$$\mu = 1/\lambda = 2000$$

$$\therefore f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 0.0005 e^{-0.0005x}$$

(أ) احتمال أن ينتهى عمر البطارية خلال 200 ساعة من الاستعمال هو:

$$P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-0.0005 \times 200} = 1 - e^{-0.1} = 0.1$$

(ب) احتمال أن تعيش البطارية أكثر من 4,000 ساعة هو:

$$\begin{aligned} P(X > 4000) &= 1 - P(X \leq 4000) = 1 - F(4000) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.0005 \times 4000}) \\ &= e^{-2} = 0.135 \end{aligned}$$

٣- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة التى لها تطبيقات فى شتى مجالات الحياة منها:

□ توزيع الدخول فى شركة ما.

□ توزيع درجات الطلاب فى امتحان معين .

□ توزيع أطوال (أو أوزان) الطلاب فى إحدى المدارس.

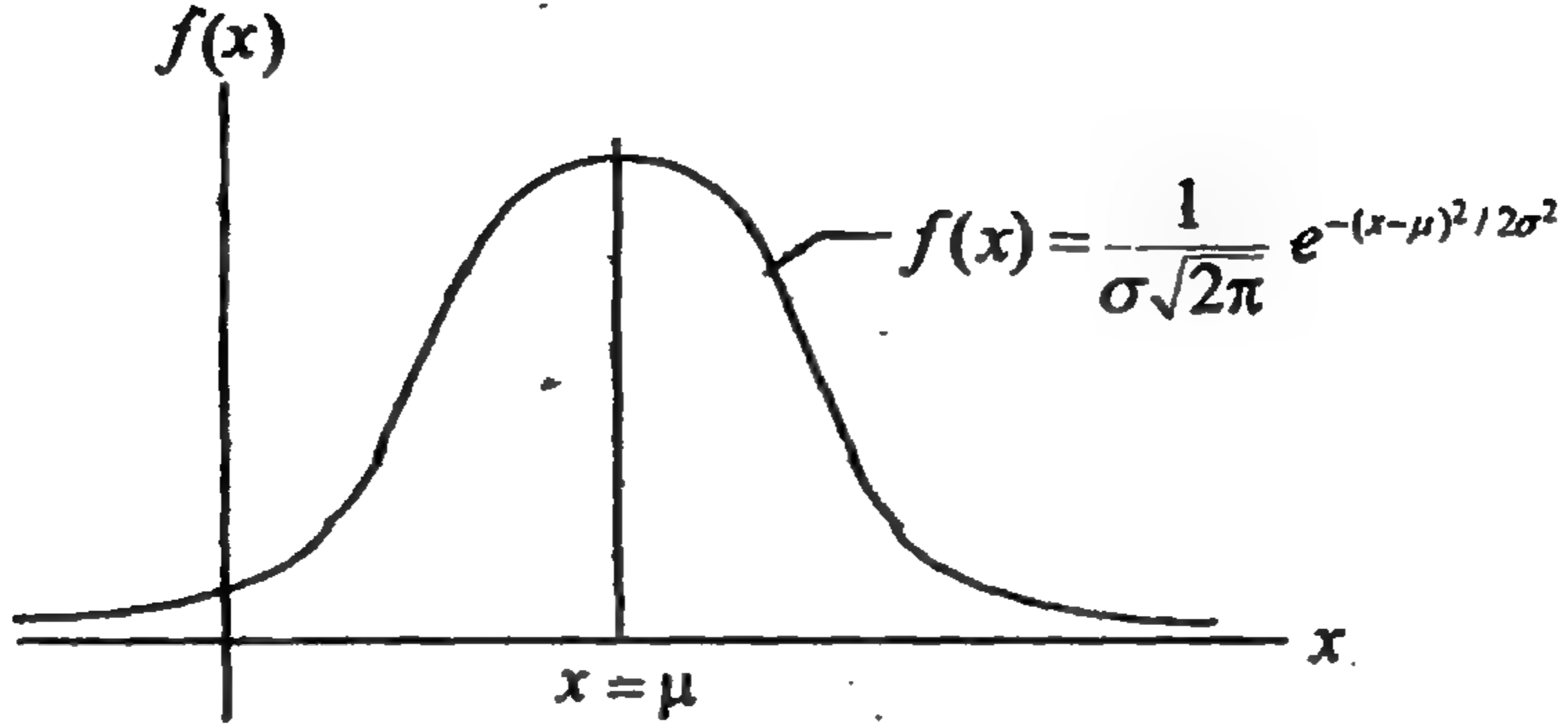
وسنعطى التعريف التالى:

يقال أن متغيراً عشوائياً متصلاً X يتبع توزيعاً طبيعياً بمعلمتين μ ، σ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

حيث μ هو المتوسط ، σ هو الانحراف المعياري.

وبين الشكل الآتي الرسم البياني للتوزيع الطبيعي.

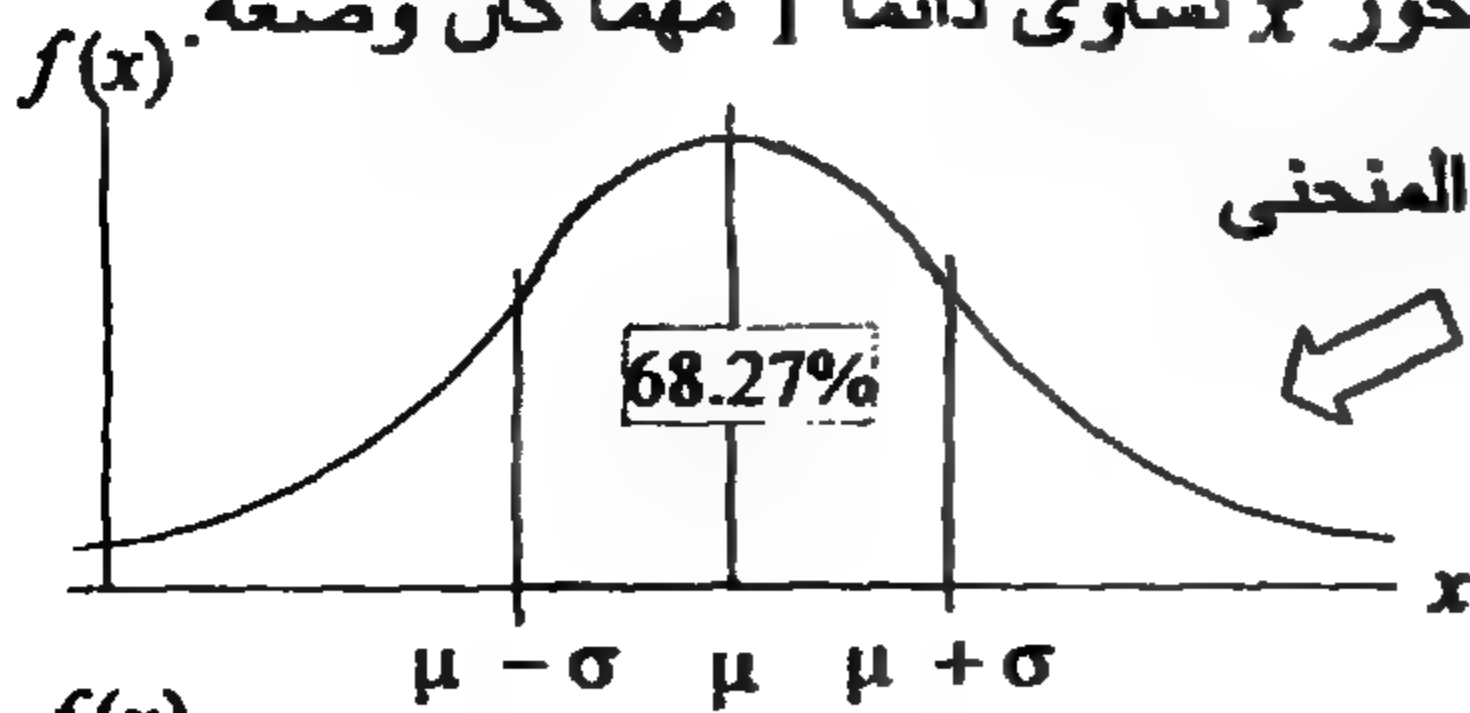


١-٣ خصائص التوزيع الطبيعي

لمنحنى التوزيع الطبيعي الخصائص الآتية:

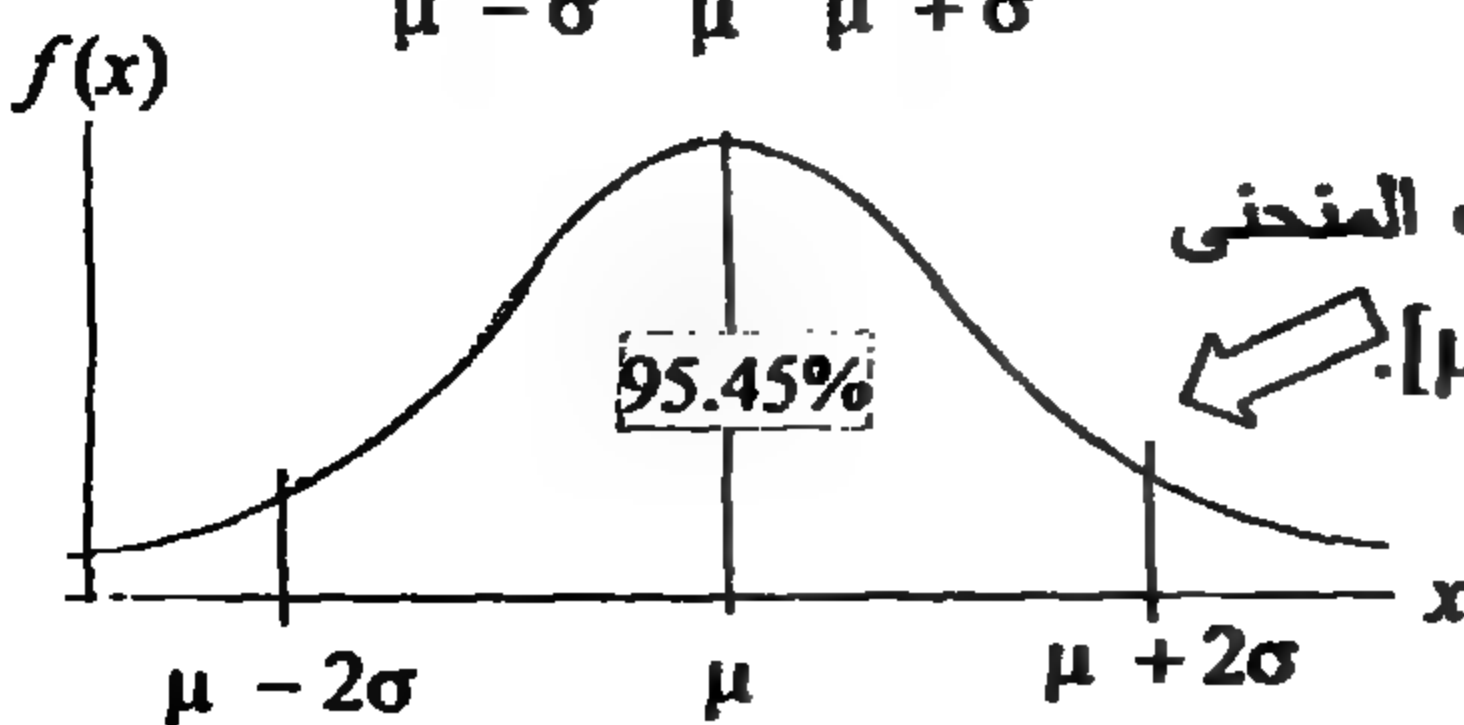
- المنحنى على شكل جرس ويمتد طرفاه إلى كلى الجهتين إلى ما لانهاية بدون تقاطع مع المحور الأفقى.
- المنحنى متمثل حول المحور $x = \mu$.
- يتساوى المتوسط والوسيط والمنوال.

➤ المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور x تساوى دائماً 1 مهما كان وضعه.



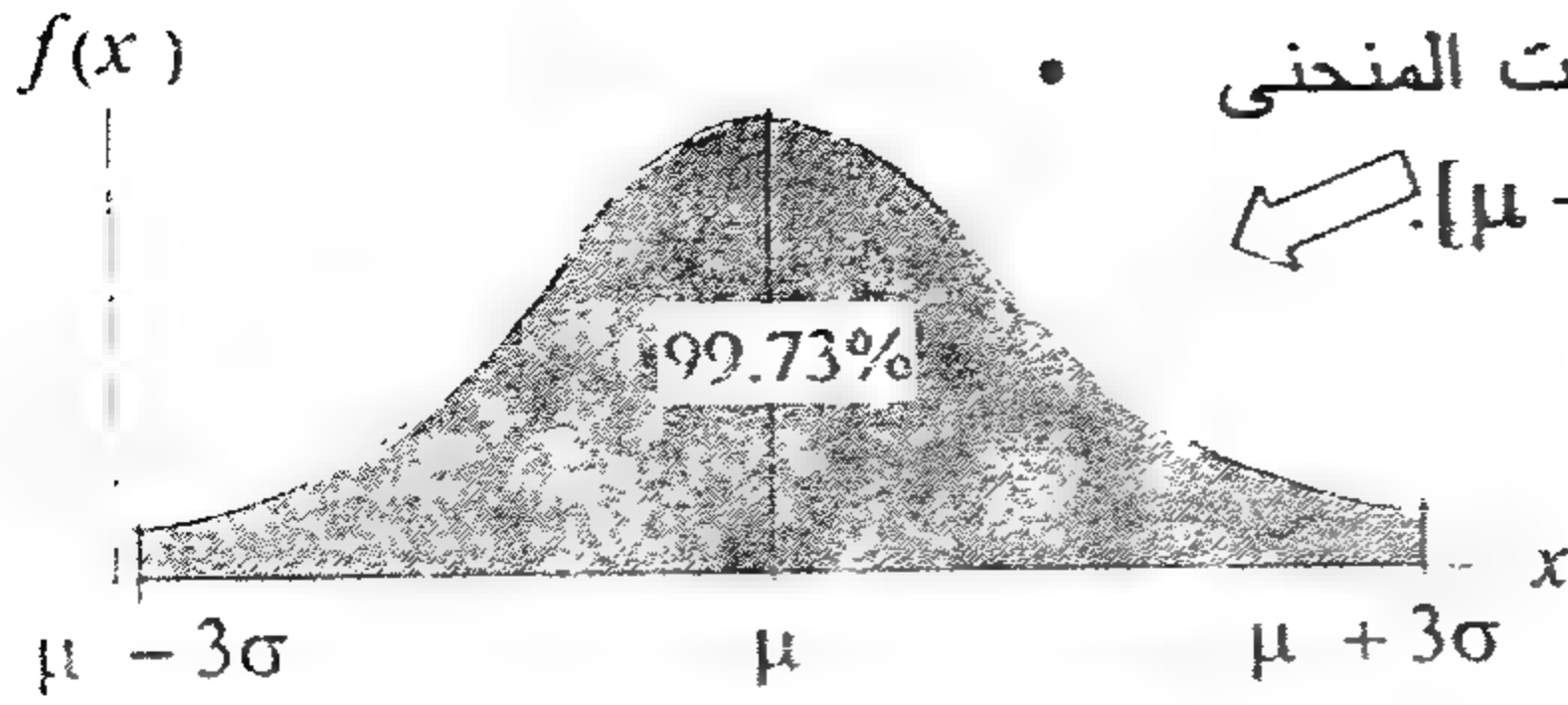
➤ حوالى 68.27% من المساحة تحت المنحنى

تقع على الفترة $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.



➤ حوالى 95.45% من المساحة تحت المنحنى

تقع على الفترة $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.



- حوالي 99.73% من المساحة تحت المنحنى تقع على الفترة $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

مثال

في مدرسة ثانوية كان متوسط درجات اختبار الذكاء ($IQ\ score$) على عينة من 1200 تلميذ يساوي 100 بانحراف معياري 15. فإذا علمت أن اختبار الذكاء يتبع التوزيع الطبيعي أوجد:

- عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 85 ، 115.
- عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 70 ، 130.
- عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 55 ، 145.
- عدد التلاميذ الذين تقل درجاتهم عن 55 أو تزيد درجاتهم عن 145.
- عدد التلاميذ الذين تفوق درجاتهم 145.

الحل

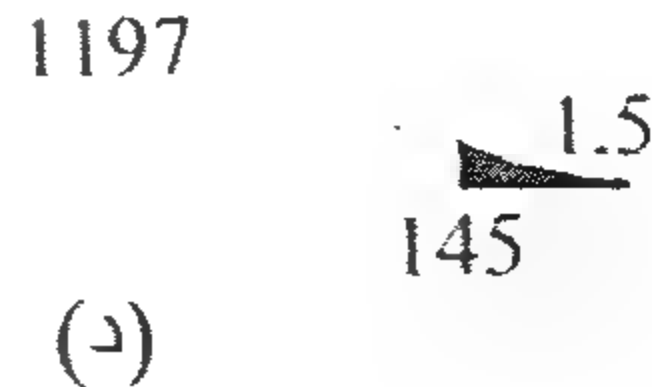
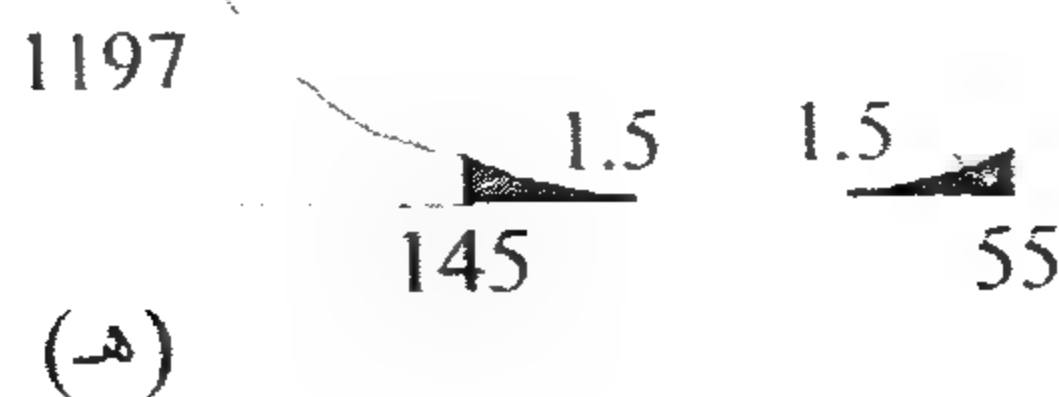
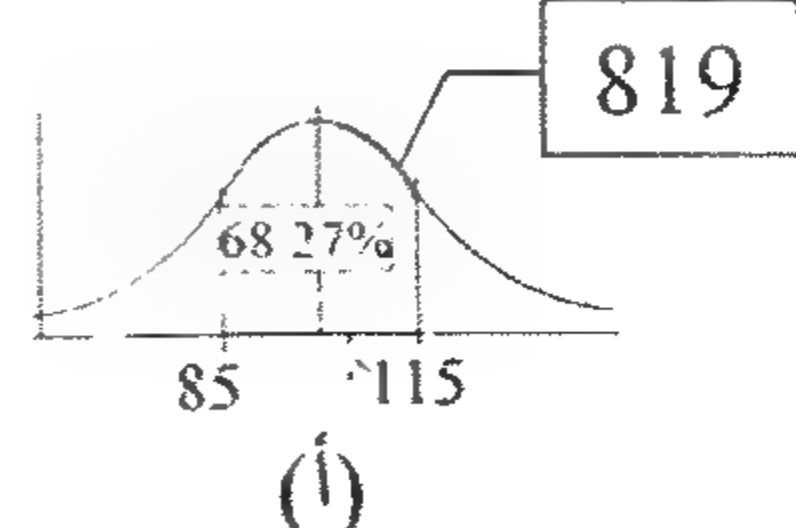
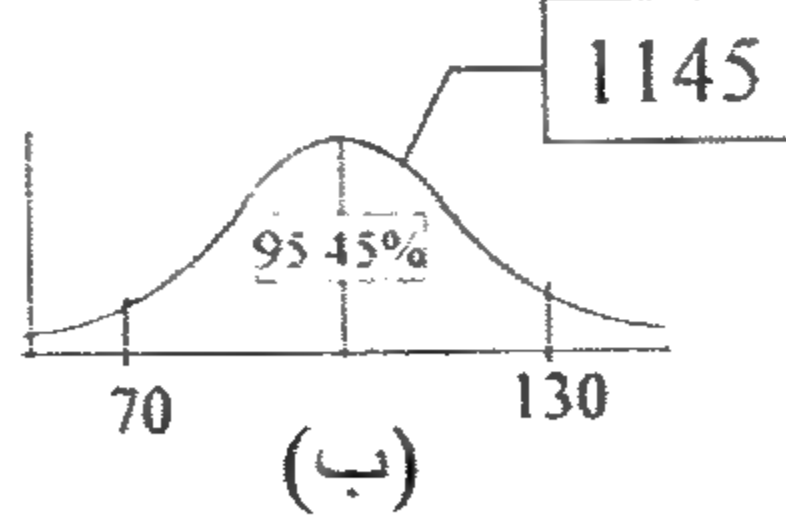
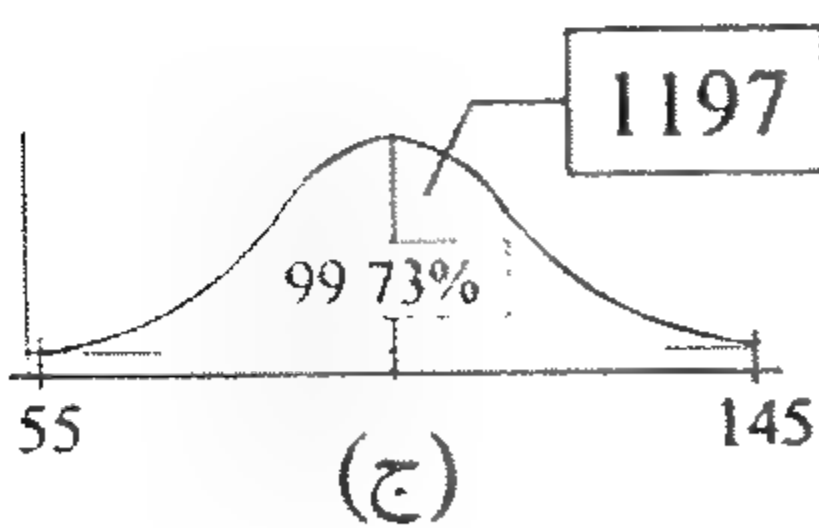
(أ) حيث أن $85 = 100 - 15$ ، $115 = 100 + 15$ ، إذن عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 85 ، 115 يساوي $(1200)(0.6827)$ أي 819.

(ب) حيث أن $70 = 100 - 30$ ، $130 = 100 + 30$ ، إذن عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 70 ، 130 يساوي $(1200)(0.9545)$ أي 1145.

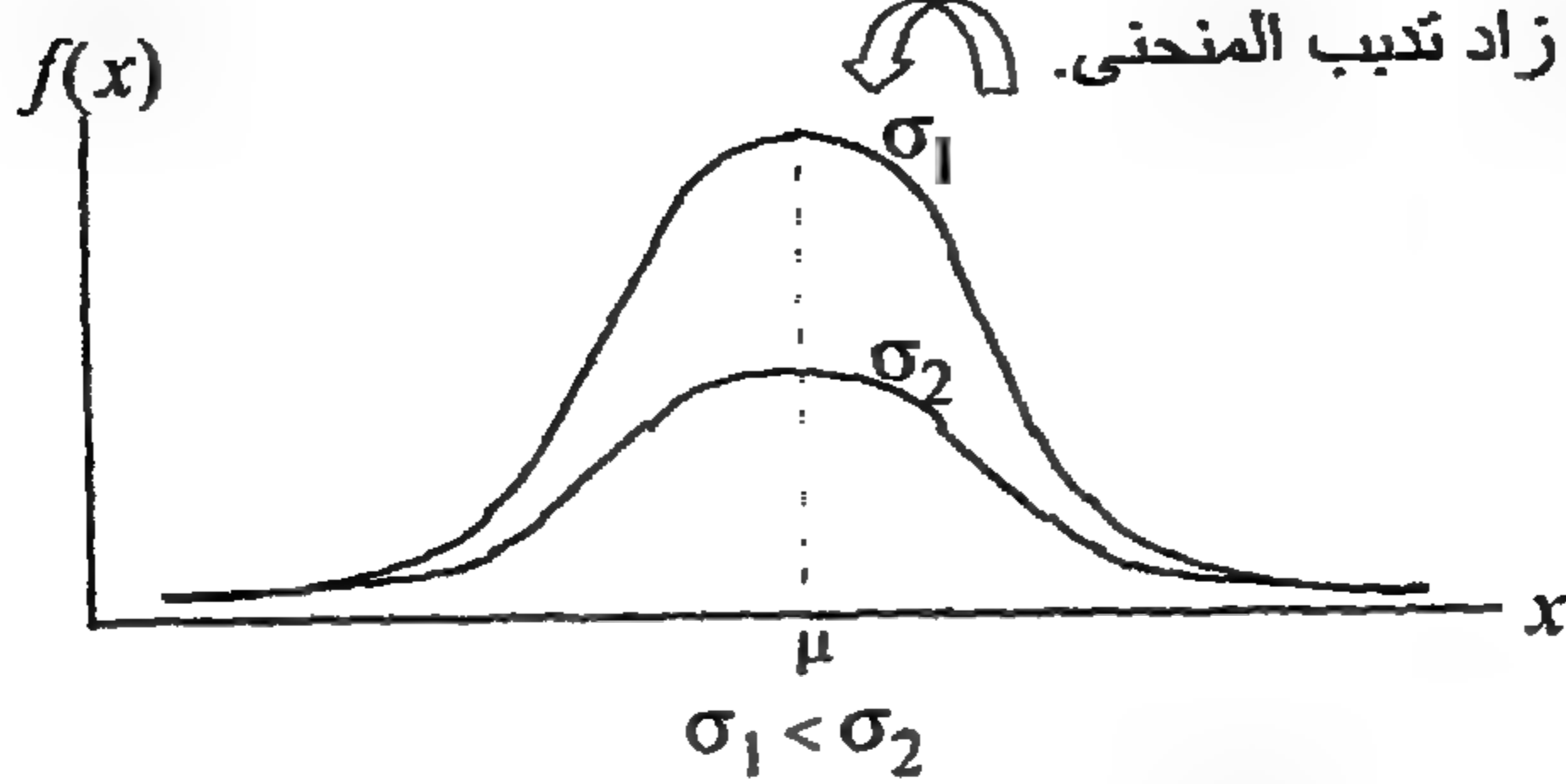
(ج) حيث أن $55 = 100 - 45$ ، $145 = 100 + 45$ ، إذن عدد التلاميذ الذين تتراوح درجاتهم بين 55 ، 145 يساوي $(1200)(0.9973)$ أي 1197.

(د) عدد التلاميذ الذين تقل درجاتهم عن 55 أو تزيد درجاتهم عن 145 يساوي $1200 - 1197$ أي ثلاثة تلاميذ.

(هـ) عدد التلاميذ الذين تفوق درجاتهم 145 يساوي تلميذ أو اثنين.



➤ كلما زاد الانحراف المعياري σ كلما زاد تقاطح المنحنى وكلما قل الانحراف المعياري كلما زاد تدبيب المنحنى.



➤ القيمة المتوقعة للتوزيع الطبيعي هي μ .

➤ تباين التوزيع الطبيعي هو σ^2 .

➤ دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الطبيعي هي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

ويتم حسابها باستخدام جداول خاصة.

٢-٢ التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

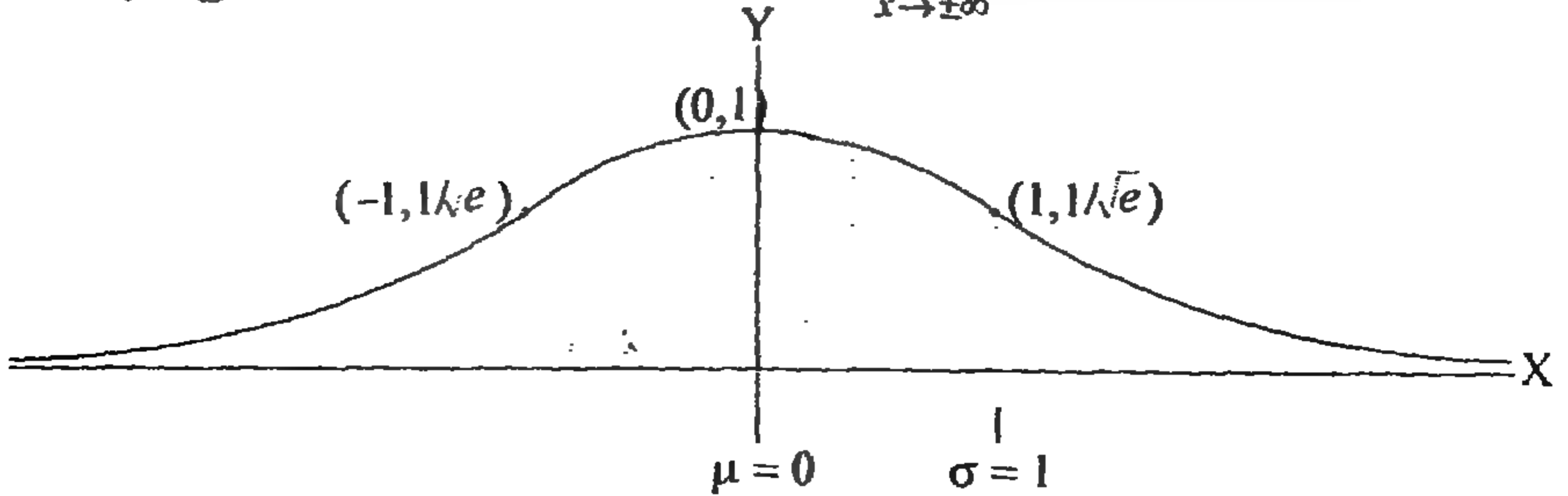
دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

وفي هذا التوزيع فإن المتوسط يساوي 0 والانحراف المعياري يساوي 1.

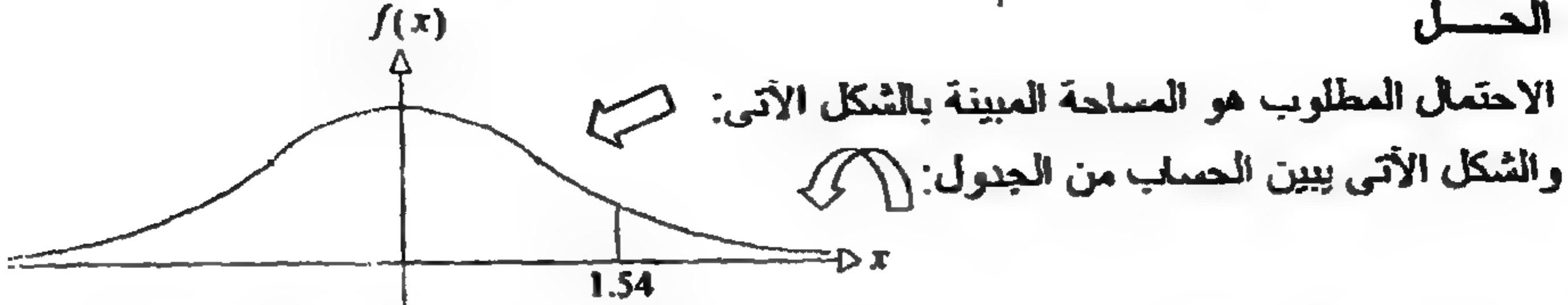
وبرسم هذه الدالة بعد تعيين قيمتها عند $x = 0$ ونقطتي الانقلاب $(\pm 1, 1/\sqrt{e})$

وملاحظة أن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ فإن شكل المنحنى يشبه الجرس.



وقد تم حساب المساحات المختلفة في الفترات $[0, x]$ حيث $x > 0$ على شكل جداول. ومن تماثل المنحنى حول محور Y يمكن حساب أى مساحة.
مثال (١)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فابعد $P(0 \leq X \leq 1.54)$
الحل



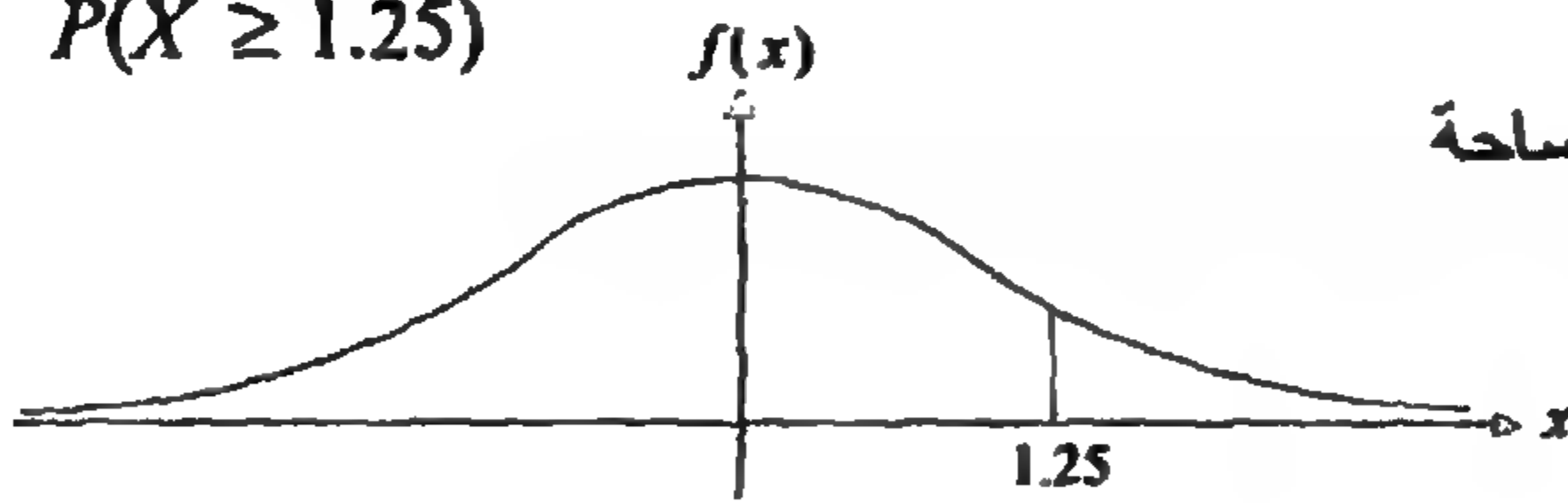
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

$$\therefore P(0 \leq X \leq 1.54) = 0.4382$$

مثال (٢)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فابعد:

$$P(X \geq 1.25)$$



الحل
الاحتمال المطلوب هو المساحة
المبينة بالشكل الآتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3642	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177

$$\therefore P(X \geq 1.25) = 0.5000 - 0.3944 = 0.1056$$

ويمكننا استخدام جدول التوزيع الطبيعي لمساحات الذيل مباشرة كالاتى:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

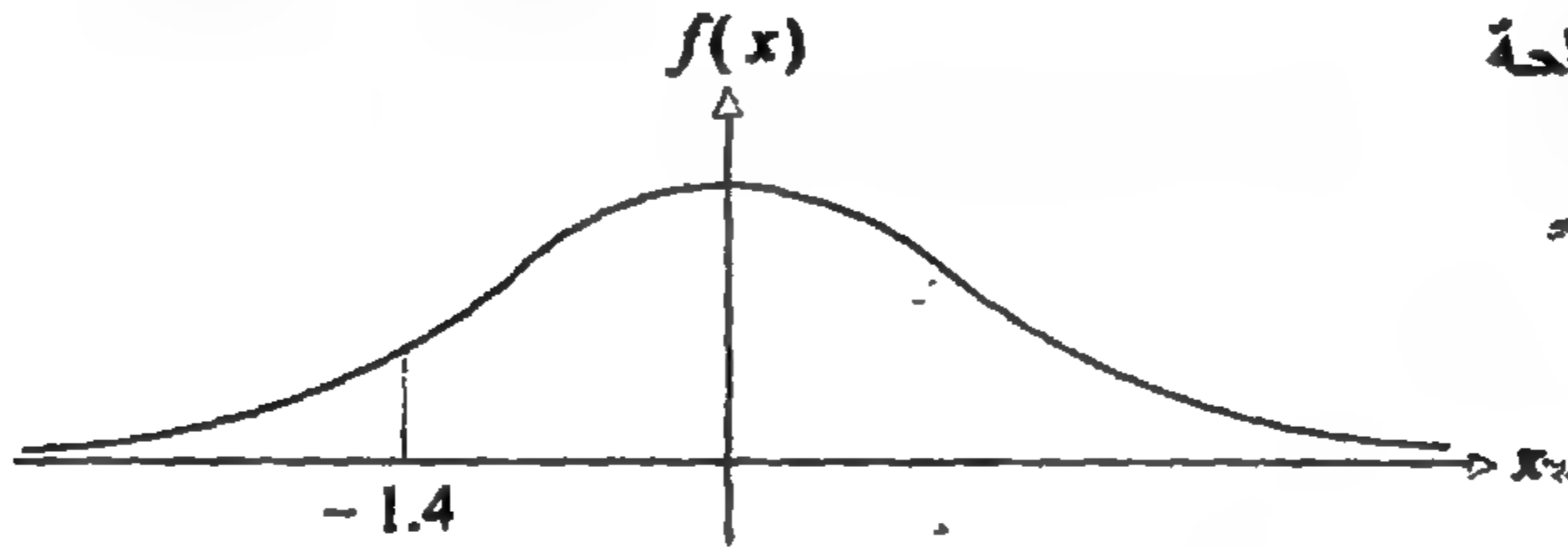
مثال (٣)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

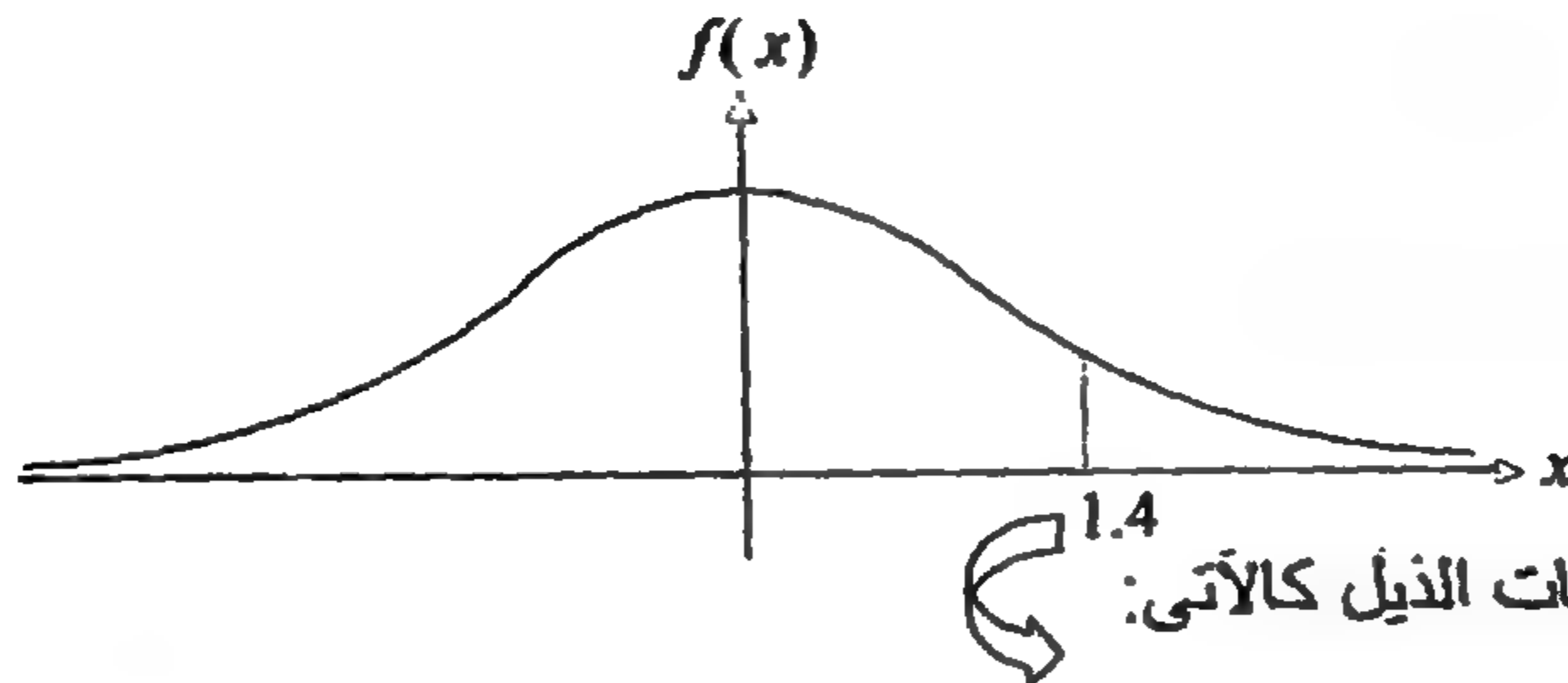
$$P(X \leq -1.4)$$

الحل

الاحتمال المطلوب هو المساحة
المبينة بالشكل الآتي: ←



وهي تساوي عددًا المساحة المبينة بالشكل الآتي: ↪



ونحصل عليها من جدول مساحات الذيل كالآتي: ↪

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

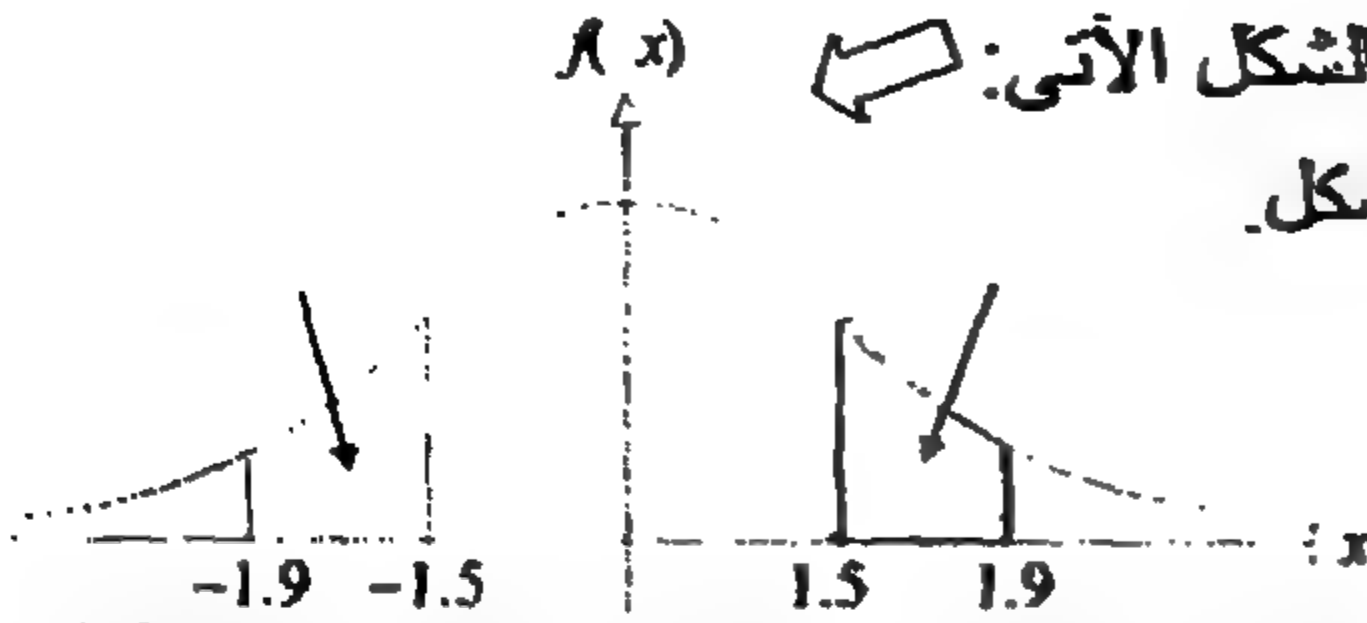
$$\therefore P(X \leq 1.4) = 0.0808$$

مثال (٤)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فابعد:

$$P(-1.9 \leq X \leq -1.5)$$

الحل

الاحتمال المطلوب هو المساحة المبينة بالشكل الآتي:  وهي تساوي تعديداً المساحة اليمنى بنفس الشكل.

ونحصل عليها من الجدول كالتالي: 

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

$$\therefore P(-1.9 \leq X \leq -1.5) = 0.4713 - 0.4332 = 0.0381$$

مثال (٥)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فابعد:

$$P(-1.25 \leq X \leq 1.58)$$

الحل

الاحتمال المطلوب هو المساحة

المبينة بالشكل الآتي: 

وهي مجموع مساحتين: مساحة يمينية ومساحة يسرى.

ونحصل عليهما من

الجدول كالتالي: 

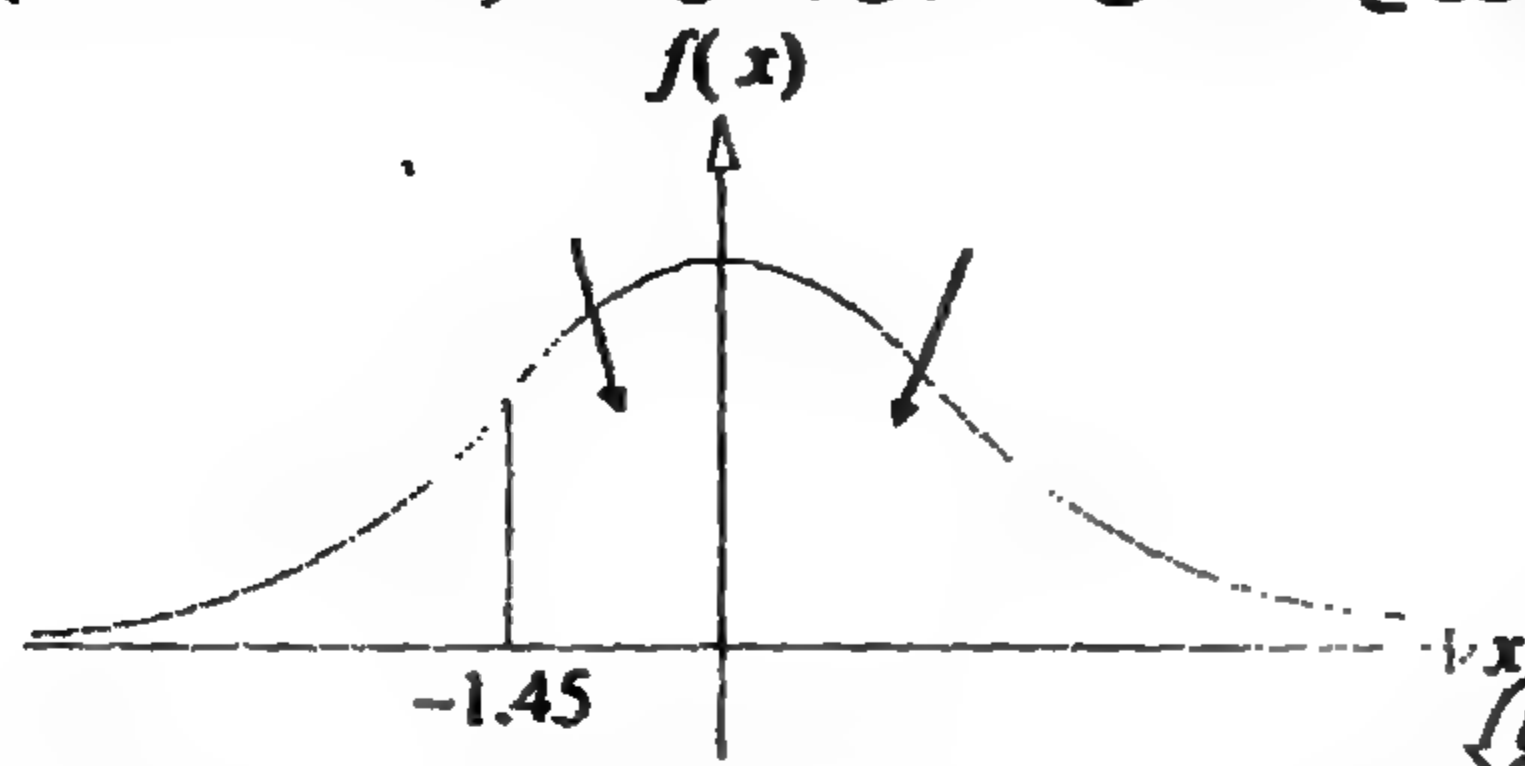
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545

$$\therefore P(-1.25 \leq X \leq 1.58) = 0.3944 + 0.4429 = 0.8373$$

مثال (٦)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فابعد $P(X \geq -1.45)$

الحل



الاحتمال المطلوب هو المساحة

المبينة بالشكل الآتي: \hookleftarrow

وهي مجموع مساحتين: مساحة

يميني تساوي 0.5 ومساحة يسرى

ونحصل عليها من الجدول كالاتي:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

$$\therefore P(-1.45 \leq X) = 0.4265 + 0.5000 = 0.9265$$

وكما أمكننا حساب قيمة الاحتمال إذا عرفنا الفترة، فبالعكس يمكن حساب نهاية (أو بداية) الفترة إذا علمت قيمة الاحتمال. ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال (١)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وكانت:

$$P(-k \leq X \leq k) = 0.9030$$

فأوجد قيمة k .

الحل

$$P(-k \leq X \leq k) = 2 P(0 \leq X \leq k)$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq k) = 1/2 \times 0.9030 = 0.4515$$

نبحث في الجدول عن القيمة 0.4515 أو أقرب منها كالاتي:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

$$\therefore k = 1.66$$

مثال (٢)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وكانت:

$$P(-2 \leq X \leq k) = 0.9692$$

فأوجد قيمة k .

الحل

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X \leq k) &= P(-2 \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq k) \\ &= P(0 \leq X \leq 2) + P(0 \leq X \leq k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(0 \leq X \leq k) &= P(-2 \leq X \leq k) - P(0 \leq X \leq 2) \\ &= 0.9692 - 0.4772 = 0.4920 \end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02
1.9	0.4713	0.4719	0.4726
2.0	0.4772	0.4778	0.4783

نبحث في الجدول عن القيمة 0.4920 أو أقرب منها كالاتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952

$$\therefore k = 2.41$$

مثال (٣)

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وكانت:

$$P(X \geq k) = 0.1170$$

فأوجد قيمة k .

الحل

$$P(X \geq k) = 0.5 - P(0 \leq X \leq k)$$

$$\therefore 0.1170 = 0.5 - P(0 \leq X \leq k)$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq k) = 0.5000 - 0.1170 = 0.3830$$

نبحث في الجدول عن القيمة 0.3830 أو أقرب منها كالاتى:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.1	0.3642	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177

$$\therefore k = 1.19$$

ويمكن الحصول على تلك النتيجة مباشرة من جدول مساحات الذيل كالاتى:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985

٣-٢ التحويل إلى التوزيع الطبيعي المعياري

في كثير من التطبيقات يكون التوزيع الإحصائي طبيعياً ولكنه غير معياري؛ فمثلاً يوجد هذا التوزيع في عدة حالات منها رصد درجات الطلاب وقياس أطوالهم وأوزانهم. ويشبه هذا التوزيع المعياري إلا أن به زحزحة (يمينا أو يسارا) بمقدار μ وبتغيير مقياس الرسم بمقدار σ .

ولحساب احتمال وقوع المتغير العشوائي X في أي فترة $[a, b]$ فإننا نحول التوزيع إلى توزيع معياري بإجراء التحويل الآتي:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

حيث μ هو المتوسط الحسابي ، σ الانحراف المعياري. وعلى ذلك فإن دالة الكثافة الاحتمالية تصبح هي دالة التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (١)

إذا كان X متغير عشوائي متوسطه الحسابي 50 وانحرافه المعياري 10 فأوجد كلا من $P(X \geq 80)$ ، $P(62 \leq X \leq 70)$.

الحل

$$\begin{aligned} \text{بوضع } Z = \frac{X - 50}{10} \text{ فإن: } P(X \leq 80) &= P\left(Z \leq \frac{80 - 50}{10}\right) = P(Z \leq 3) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 3) = 0.5 + 0.4987 = 0.9987 \end{aligned}$$

مثال (٢)

إذا كانت أوزان طلاب أحد المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي هو 65 وتباينه 12 واختير طالب عشوائياً من بين هؤلاء الطلاب فاحسب احتمال أن يكون وزنه:

(أ) أكبر من 80 كجم. (ب) أقل من 60 كجم. (ج) ينحصر بين 60 كجم ، 70 كجم.

الحل

$$X = 80 \Rightarrow Z = \frac{80 - 65}{12} = 1.25 \quad (\text{أ})$$

$$P(Z \geq 1.25) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

(ب)

$$X = 60 \Rightarrow Z = \frac{60 - 65}{12} = -0.4167$$

$$P(Z < -0.4167) = 0.5 - P(0 < Z < 0.4167) = 0.5 - 0.1628 = 0.3372$$

(ج)

$$X = 70 \Rightarrow Z = \frac{70 - 65}{12} = 0.4167$$

$$\begin{aligned} P(-0.4167 \leq Z \leq 0.4167) &= 2P(0 < Z < 0.4167) \\ &= 2 \times 0.1628 = 0.3256 \end{aligned}$$

مثال (٣)

إذا كان الوقت اللازم لهضم وحدة واحدة من طعام معين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره 35 دقيقة وانحراف معياري قدره 4 دقائق فأوجد:

(أ) احتمال أن تهضم وحدة طعام في أقل من 40 دقيقة.

(ب) احتمال أن تهضم وحدة طعام في أكثر من 28 دقيقة.

الحل

$$X = 40 \Rightarrow Z = \frac{40 - 35}{4} = 1.25$$

(أ)

$$P(Z < 1.25) = 0.5 + P(0 \leq Z < 1.25) \\ = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$$

$$X = 28 \Rightarrow Z = \frac{28 - 35}{4} = -1.75$$

(ب)

$$P(Z > -1.75) = 0.5 + P(0 \leq Z < 1.75) \\ = 0.5 + 0.4599 = 0.9599$$

٢-٤ التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين

إذا كان حجم العينة n في توزيع ذي الحدين صغير نسبياً فإنه يسهل حساب الاحتمالات المختلفة بسهولة باستخدام الصيغة:

$$b(n, k; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

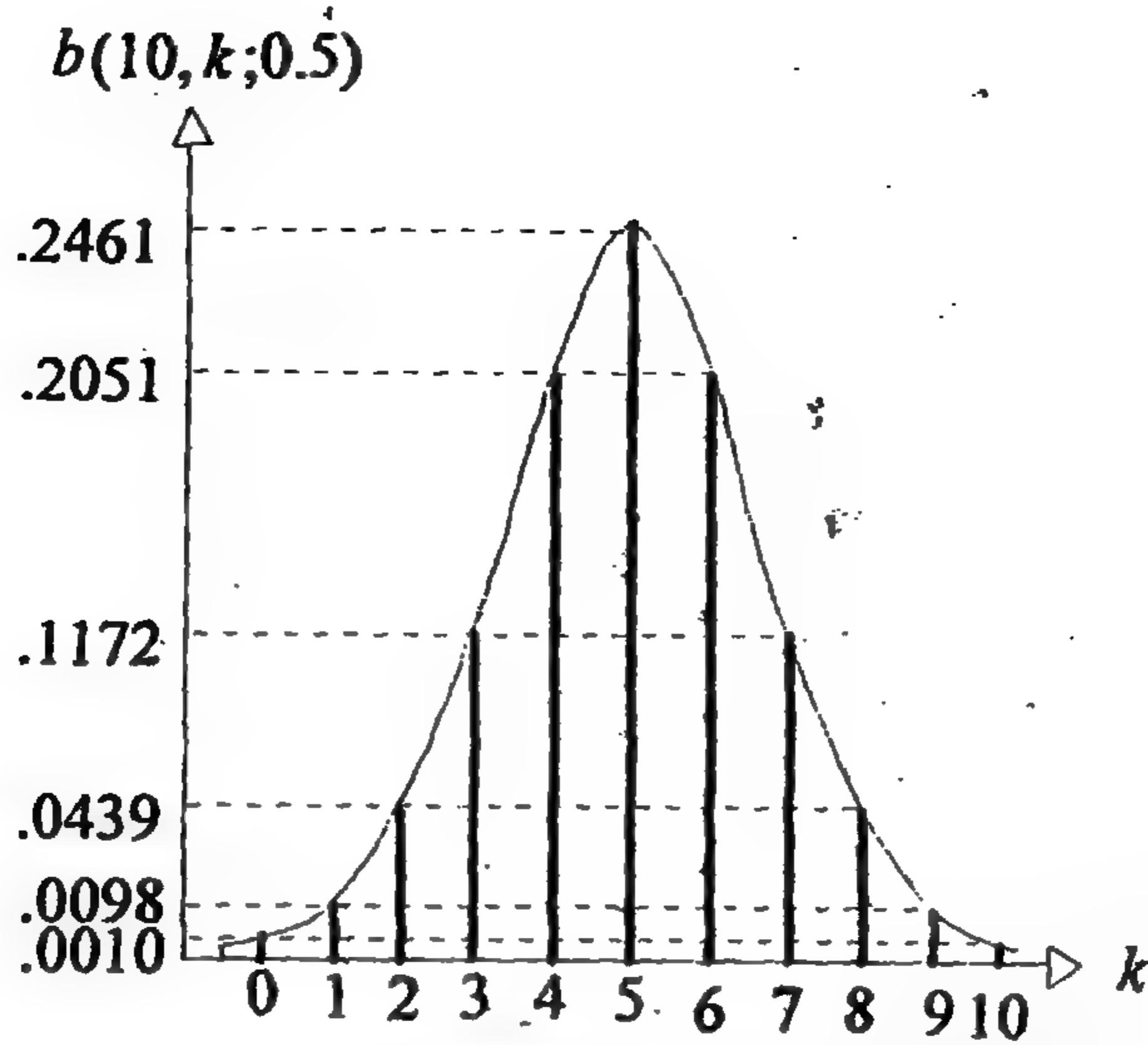
ولكن إذا كانت n كبيرة نسبياً فيصعب استخدام تلك الصيغة، وفي هذه الحالة يمكن أن نستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين خاصة عندما تقترب قيمة المعلمة p من 0.5. أما إذا كانت p صغيرة فلكي نستخدم توزيع ذي الحدين فإن n يجب أن تكون كبيرة كبراً كافياً بحيث يظل حاصل الضرب np متوسطاً في قيمته.

مثال (١)

في تجربة إلقاء عملة سوية 10 مرات فإن احتمال أن نحصل على صورة k من المرات يساوي $b(10, k; 0.5)$ وبين الجدول المقابل قيم هذا الاحتمال. \leftarrow

كما يبين الشكل الآتي رسماً بيانياً للتوزيع الاحتمالي. \curvearrowright

$b(10, k; 0.5)$	k
.0010	0
.0098	1
.0439	2
.1172	3
.2051	4
.2461	5
.2051	6
.1172	7
.0439	8
.0098	9
.0010	10



من الشكل نرى أن المنحنى هو المنحنى الطبيعي بكل صفاته حيث المتوسط μ يساوى 5 والانحراف المعياري σ يساوى 1.58.

مثال (٢)

يُنتج مصنع لأقلام الرصاص 60,000 قلمًا في اليوم، وقد بينت دراسات الجودة أن 4% من الأقلام معيَّب. إذا اختبرت عينة من 500 قلم من الإنتاج اليومي فما هو احتمال أن يوجد في العينة من 12 قلم إلى 24 قلم معيَّب؟ وما احتمال أن يوجد بالعينة 32 قلم معيَّب على الأقل؟

الحل

حيث أن كبير نسبيًا، إذن يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين. متوسط التوزيع هو:

$$\mu = np = 500 \times 0.04 = 20$$

وانحرافه المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times 0.04 \times 0.96} = 4.38$$

لنفرض أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الأقلام المعيبة. إذن فالمراد أن نوجد

$$P(X \geq 32) \quad , \quad P(12 \leq X \leq 24)$$

لنأخذ Z ليكون المتغير العشوائي المعياري المناظر لـ X . إذن:

$$X = 12 \Rightarrow Z = \frac{12 - 20}{4.38} = -1.83$$

$$X = 24 \Rightarrow Z = \frac{24 - 20}{4.38} = 0.91$$

$$X = 32 \Rightarrow Z = \frac{32 - 20}{4.38} = 2.74$$

ويكون المطلوب هو إيجاد $P(Z \geq 2.74)$ ، $P(-1.83 \leq Z \leq 0.91)$ من الجداول نجد أن:

$$P(-1.83 \leq Z \leq 0.91) = 0.4664 + 0.3186 = 0.785$$

$$P(X \geq 32) = 0.5 - 0.4969 = 0.0031$$

إنن:

احتمال أن يوجد في العينة من 12 قلم إلى 24 قلم معيب يساوي 0.785 ، احتمال أن يوجد بالعينة 32 قلم معيب على الأقل يساوي 0.0031.

مثال (٣)

في مدينة من المدن وجد في المتوسط أن شخص واحد بين كل 80 شخص فصيلة دمه X . إذا أخذنا عينة عشوائية من 200 شخص للتطوع بالدم فما هو احتمال أن نجد بينهم 5 أشخاص على الأقل فصيلة دمهم X ؟ كم متطوع يلزم أخذهم ليكون احتمال وجود واحد منهم فصيلة دمه X يساوي 0.9 على الأقل؟

الحل

$$\mu = np = 200 \times \frac{1}{80} = 2.5$$

$$\sigma^2 = npq = 2.5 \times (1 - \frac{1}{80}) = 2.5 \times (1 - 0.0125)$$

$$= 2.5 \times 0.9875 = 2.46875$$

$$\sigma = \sqrt{2.46875} = 1.57$$

$$Z_{X=5} = \frac{5 - 2.5}{1.57} = 1.59$$

$$P(X \geq 5) = P(Z \geq 1.59) = 0.0582$$

تمارين ٧ (أ)

اختير عدد x عشوائيا من الفترة $[0,5]$. فإذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائى الذى يعبر عن العدد هي $f(x) = 1/5$, $0 \leq x \leq 5$ فأوجد احتمال أن العدد المختار يقع فى الفترة $[1,3]$.

X متغير عشوائى متصل يتبع توزيعا منتظما فى الفترة $[20,50]$.

(أ) ارسم منحنى كل من دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية.

(ب) احسب المتوسط والانحراف المعياري لـ X .

(ج) أوجد $P(X \leq 30)$ ، $P(X \geq 50)$ ، $P(30 \leq X \leq 40)$.

تعلن إحدى شركات الخدمات البريدية أن زمن أداء الخدمة X لأى طلب يتبع توزيعا منتظما ما بين 14 ، 20 يوما.

(أ) ارسم منحنى كل من دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية.

(ب) احسب المتوسط والانحراف المعياري لـ X .

(ج) ما احتمال أن تتم خدمة طلب ما فى خلال المدة بين 15 إلى 18 يوما؟ فى خلال 16 يوما أو أقل؟ فى خلال 16 يوما على الأقل؟

٤. X متغير عشوائى متصل يتبع توزيعا أسيا بمعلمة $\lambda = 3$. أوجد:

(أ) $P(X > 2)$ (ب) $P(X > 1.5)$ (ج) $P(X < 3)$

٥. الوقت ما بين المكالمات الهاتفية التى ترد إلى فندق من الفنادق يتبع توزيعا أسيا بمعلمة $\lambda =$

0.5. ما هو احتمال أن تمر 6 دقائق على الأقل بين مكالمتين؟

٦. الطلب على صنف من الأصناف بمخازن شركة خلال أسبوع يتبع توزيعا دالة كثافته

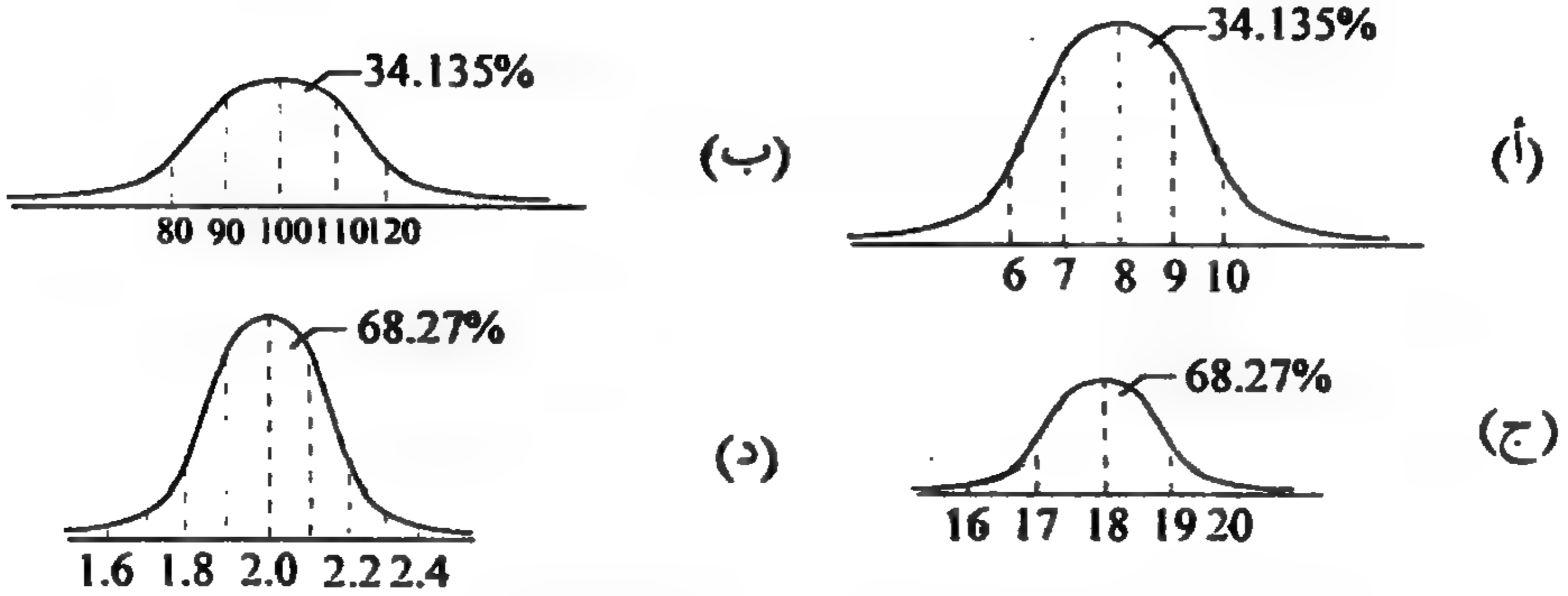
الاحتمالية $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$. أوجد:

(أ) احتمال الطلب لأقل من 5 وحدات من الصنف.

- (ب) احتمال الطلب لأقل من 100 وحدة من الصنف.
(ج) احتمال الطلب لأكثر من 10 وحدات من الصنف.

تمارين ٧ (ب)

١. أوجد μ ، σ لكل من منحنيات التوزيع الطبيعي الآتية:



٢. لدينا توزيع طبيعي متوسطه يساوى 13.1 وانحرافه المعياري يساوى 5.1. أوجد قيم المتغير العشوائى المعيارى Z المقابل للقيم الآتية:

8, 9, 15, 16, 22, 23, 25

٣. لدينا توزيع طبيعي متوسطه يساوى 15.2 وانحرافه المعياري يساوى 9.3. أوجد قيم المتغير العشوائى المعيارى Z المقابل للقيم الآتية:

7, 9, 13, 15, 29, 37, 41

٤. يُقيم أستاذ جامعى تقديرات طلابه فى الامتحان حسب القاعدة الآتية:

تقدير ممتاز لمن يحصل على درجة أكبر من $\mu + 1.6\sigma$.

تقدير جيد جدا لمن يحصل على درجة تقع بين $\mu + 0.6\sigma$ ، $\mu + 1.6\sigma$.

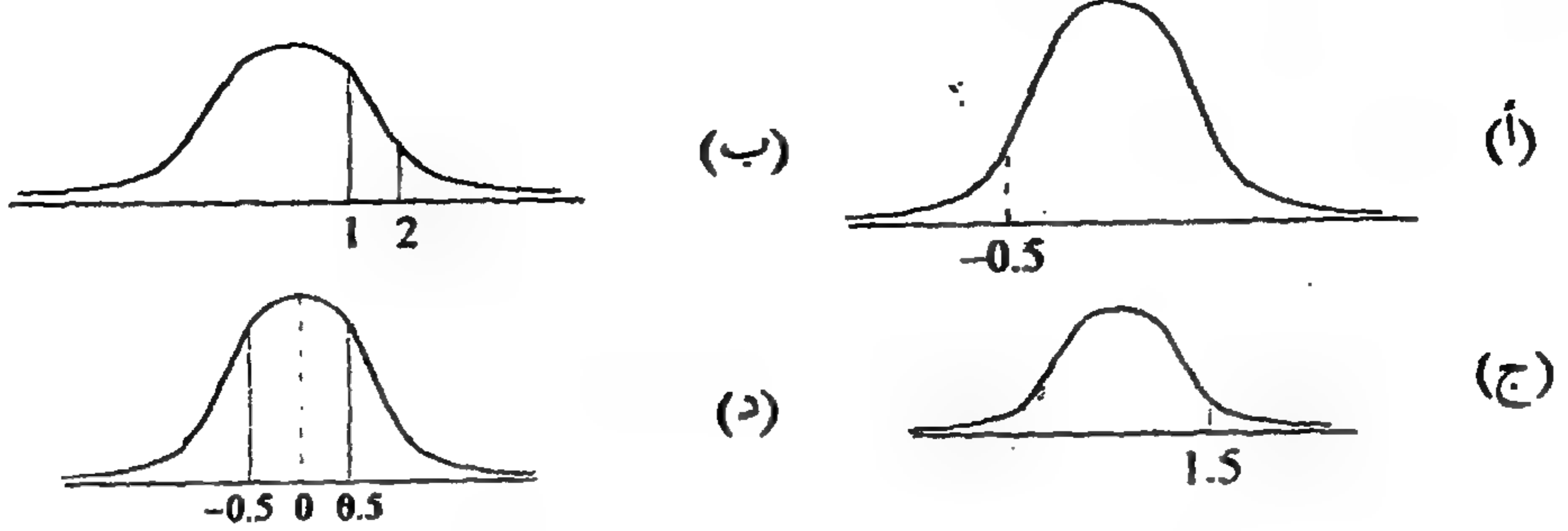
تقدير جيد لمن يحصل على درجة تقع بين $\mu - 0.3\sigma$ ، $\mu + 0.6\sigma$.

تقدير مقبول لمن يحصل على درجة تقع بين $\mu - 1.4\sigma$ ، $\mu - 0.3\sigma$.

راسب لمن يحصل على درجة أقل من $\mu - 1.4\sigma$.

بفرض أن الدرجات تتبع توزيعا طبيعيا أوجد نسبة الحاصلين على كل تقدير.

٦. أوجد كلا من المساحات المبينة بالأشكال الآتية بفرض أن المنحنى هو منحنى طبيعي:



٧. إذا كان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي أوجد:

(أ) $P(Z < 1.8)$ (ب) $P(Z > -0.5)$ (ج) $P(-0.2 < Z < 0.5)$

٨. إذا كانت أطوال 500 ورقة من أوراق نبات معين تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 132

مم وانحراف معياري 10 مم ، أوجد عدد الأوراق التالية:

(أ) ما بين 130 مم ، 140 مم.

(ب) أكثر من 150 مم.

(ج) أقل من 130 مم.

٩. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 70 وانحرافه المعياري 25 فأوجد:

(أ) $P(X > 73)$ (ب) $P(X < 69)$ (ج) $P(X > 90)$

١٠. يبلغ متوسط حياة المصابيح الكهربائية في أحد المصانع 1500 ساعة بانحراف معياري

200 ساعة ، على افتراض أن حياة المصابيح تخضع للتوزيع الطبيعي أوجد احتمال

أن أحد المصابيح يحترق في أقل من 1100 ساعة.

١١. إذا كانت درجة الحرارة خلال شهر مارس تتبع توزيع طبيعي بتوقع 20° وانحراف

معياري 3.33° . أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة 21.11° ، 26.66° في

هذا الشهر.

١٢. إذا علم أن مقياس الذكاء X في مجتمع ما موزع توزيعا طبيعيا ذا متوسط 100 وانحراف معياري 10 مثل الاحتمالات الآتية بمساحات مظلمة تحت منحنى التوزيع الطبيعي:

$$P(X \leq 75) , P(105 < X \leq 112) , P(X \geq 120).$$

١٣. إذا كان زمن احتراق صاروخ تجربي متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 4.3 ثانية وانحرافه المعياري يساوي 0.04 ثانية فأوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) أن يحترق الصاروخ في أقل من 4.25 ثانية.

(ب) أن يحترق الصاروخ في أكثر من 4.40 ثانية.

(ج) أن يحترق الصاروخ فيما بين 4.30 ، 4.42 ثانية.

١٤. إذا كانت درجة الحرارة خلال فترة من العام في بلد ما تتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 20° وانحرافه المعياري 3° فأوجد الاحتمالات الآتية:

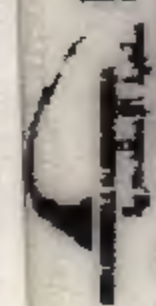
(أ) ألا تزيد درجة الحرارة عن 23° .

(ب) أن تكون درجة الحرارة بين 15° ، 26° .

(ج) ألا تقل درجة الحرارة عن 20° .

ما هي الدرجة التي تتجاوزها الحرارة بالبلد باحتمال قدره 0.937؟

2
49

 Bibliotheca Alexandrina



0942782